

Особенности методов расчета тепловых полей рабочих элементов спиральных компрессоров

Ю.А. Паранин, О.Ю. Паранина (ЗАО «НИИтурбокомпрессор им. В.Б. Шнеппа», Группа ГМС)

Описана методика расчета тепловых полей рабочих элементов спиральных компрессоров для решения стационарной и нестационарной задач, в том числе методы решения, алгоритмы расчета граничных данных. Представлены результаты численного эксперимента, хорошо совпадающие с измеренными температурами.

Ключевые слова: спиральный компрессор, теплообмен, тепловые поля, математическое моделирование, стационарная задача, нестационарная задача.

Spesial Aspects of the Methodology for the Analysis of Thermal Fields of the Working Elements of Scroll Compressors

Yu.A. Parinin, O.Yu. Paranina (CJSC «NIIturbokompressor n.a. V.B. Shneppe», HMS Group)

Methodology for the analysis of thermal fields of the working elements of scroll compressors used for solving the stationary and time-dependent problems has been described, including the solving methods and the computation algorithm for calculation of boundary data. Results of numerical experiment showing good agreement with the measured temperatures have been presented.

Keywords: scroll compressor, heat exchange, thermal fields, mathematical simulation, stationary problem, nonstationary problem.

При математическом моделировании рабочих процессов спиральных компрессоров определяющее значение имеет учет теплообмена в рабочих полостях и изменение монтажных зазоров в результате тепловых деформаций рабочих элементов (подвижной и неподвижной спиралей), в основном за счет нагрева горячим сжимаемым газом. Так, неучет теплообмена и изменения зазоров от тепловых деформаций рабочих элементов воздушного спирального компрессора сухого сжатия при расчете внутреннего адиабатного КПД может привести к расхождению с экспериментальными данными на (12,3–32,7)% [1]. Для расчета теплообмена необходимо знать тепловые поля поверхностей спиралей, образующие рабочие полости (вогнутая профицированная поверхность ребра неподвижной спирали, выпуклая профицированная поверхность ребра подвижной спирали, поверхность основания неподвижной спирали, поверхность основания подвижной спирали), а для расчета тепловых деформаций – тепловые поля всех поверхностей рабочих элементов. Спираль представляет собой сложное геометрическое тело, состоящее из основания и тонкого профицированного ребра, поэтому экспериментальное определение температурных полей рабочих элементов в необходимом объеме не всегда возможно. Для подвижной спирали такая задача практически не осуществима. В данной статье представлены методики расчета тепловых полей для эволютивных спиралей, основанные на методах математического моделирования и предназначенные для решения стационарной и нестационарной задач.

Спиральные компрессоры в основном находят применение в технологических процессах, требующих их продолжительной работы. Однако в некоторых отраслях промышленные спиральные компрессоры работают кратковременно, например, воздушные спиральные компрессоры сухого сжатия для стоматологии. Во время продолжительной работы компрессор эксплуатируется

на установившемся режиме в прогретом состоянии (стационарная постановка задачи определения тепловых полей рабочих элементов). При кратковременной работе – на неустановившемся режиме, во время ее прогрева (нестационарная постановка задачи определения тепловых полей рабочих элементов).

Описание метода решения стационарной задачи

Разработанная методика предназначена для расчета стационарных трехмерных температурных полей подвижной и неподвижной спиралей, соответствующих средней по циклу температуре сжимаемого газа.

Стационарное распределение температуры в спирали описывается трехмерным уравнением теплопроводности (уравнением Лапласа)

$$\Delta T_i(x) = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где Ω_1 – трехмерная область, занимаемая спиралью, $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точка трехмерного пространства,

$$\Delta T(x) = \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_3^2}$$

– трехмерный оператор Лапласа; Значение $i = 1$ соответствует неподвижной спирали, $i = 2$ – подвижной спирали, T_i – температура спирали.

Границные условия. Граница Γ области Ω_i разбивается на две части $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$; Γ_1 – та часть границы, которой задается температура (см. далее описание граничных условий для неподвижной спирали). На Γ_1 ставится граничное условие Дирихле

$$T(x) = T_d(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad (2)$$

где T_d – заданная функция.



На Γ_2 ставится граничное условие третьего рода, описывающее теплообмен с внешней средой, имеющей заданную температуру, и противоположной спиралью:

$$k \frac{\partial T_i(x)}{\partial v} + \gamma(x)[T_i(x) - \gamma_1(x)T_0(x) - \gamma_2(x)T_{3-i}(x)] = q(x), \quad x \in \Gamma_2, \quad (3)$$

где $i = 1, 2$;

$$y(x) = \alpha(x) + \beta(x); \quad y_1(x) = \alpha(x)/[\alpha(x) + \beta(x)]; \quad y_2(x) = \beta(x)/[\alpha(x) + \beta(x)];$$

k – коэффициент теплопроводности материала спирали; α – коэффициент теплообмена с внешней средой (воздух, охлаждающая вода, вал, корпус); T_0 – температура внешней среды; $\beta = \lambda/L$ – коэффициент теплообмена с противоположной спиралью; λ – коэффициент теплопроводности воздуха; L – расстояние между соответствующими участками подвижной и неподвижной спиралью; q – плотность теплового потока (за счет тепловыделения подшипников и от трения уплотнительной ленты).

Уравнение (1) с граничными условиями (2), (3) аппроксимировалось системой линейных алгебраических уравнений по методу конечных элементов [2]. Предварительно в подвижной и неподвижной спиральях строилась трехмерная призматическая сетка с треугольными основаниями. Сетка адаптировалась к поверхностям ребра спирали и основания.

При аппроксимации уравнения использовались изопараметрические элементы с узлами, расположенными в вершинах призмы. При вычислении локальных матриц жесткости использовались формулы численного интегрирования, позволяющие точно находить элементы этих матриц. Полученная в результате аппроксимации система уравнений решалась при помощи итерационного метода.

На первой итерации β принималось равным нулю. Температурные поля подвижной и неподвижной спиралей определяются при этом независимо. На всех последующих итерациях в граничные условия для определения температуры спирали входит температура на поверхности противоположной спирали.

Каждый шаг итерационного метода требует системы линейных уравнений, аппроксимирующей уравнение Пуассона со смешанными граничными условиями. Использовалась стандартная программа, реализующая метод типа Гаусса для разреженных матриц.

Описанная методика реализована в виде комплекса программ, представляющего оконное приложение, позволяющего варьировать исходные данные и параметры численного метода, отображать результаты расчетов в числовом и графическом виде.

Описание метода решения нестационарной задачи

В общем случае уравнения теплопроводности рабочих элементов должны быть трехмерными. Однако математическое описание полей температур сложных геометрических тел в функции времени чрезвычайно сложно, поэтому были приняты следующие допущения [4]. Профилированные ребра спирали имеют большую длину – для возможности образования несколько камер сжатия. Вследствие этого по длине ребра температура рабочего газа, с которым контактирует спираль, существенно меняется, а, следовательно, меняется температура спирали. Ближе к центру спираль имеет более высокую температуру, в то же время высота ребра существенно меньше ее длины, поэтому температура по высоте ребра спирали изменяется незначительно. Таким образом, для моделирования тепловых полей ребра спирали можно ограничиться одной пространственной переменной, которая отсчитывается вдоль направления его закрутки.

Основание спирали, на котором размещено профилированное ребро, также соприкасается с неоднородно нагретым газом, в результате температура основания максимальна в центре и понижается к периферии. В силу небольшой толщины основания по сравнению с его диаметральным размером изменения температуры по толщине не должны быть большими. В связи с этим для расчета тепловых полей в основании достаточно учесть изменение температуры только по двум пространственным координатам, пренебрегая изменением температуры по толщине основания.

Указанные допущения справедливы для спиральных компрессоров, у которых подвижная и неподвижная спираль при их эксплуатации находятся в схожих тепловых условиях.

Тепловой поток между профилированным ребром и основанием рассматривался как тепловой поток, ограниченный площадью их соприкосновения и обусловленный их разностью температур.

Как подвижная, так и неподвижная спираль разбиты на два конструктивных элемента – профилированное ребро и основание, поэтому система уравнений содержит подсистемы нестационарных одномерных уравнений теплообмена для профилированных ребер и нестационарных двумерных уравнений теплообмена для оснований.

Выделим в спиральях элементы ребра (рис. 1) и основания (рис. 2), считая коэффициент температуропроводности a , теплоемкость c и плотность ρ постоянными, и напишем для них уравнения теплового баланса.

Согласно рис. 1 ($q_z, q_\rho, q_\phi, S_{sz}, S_{sp}, S_{\phi p}$ – плотность теплового потока и площадь элемента ребра в направлениях z, ρ, ϕ ; h_s ; δ_s – высота и толщина ребра; ρ, ϕ – полярные координаты), изменение температуры ребра dT_s в объеме dV_s за время dt



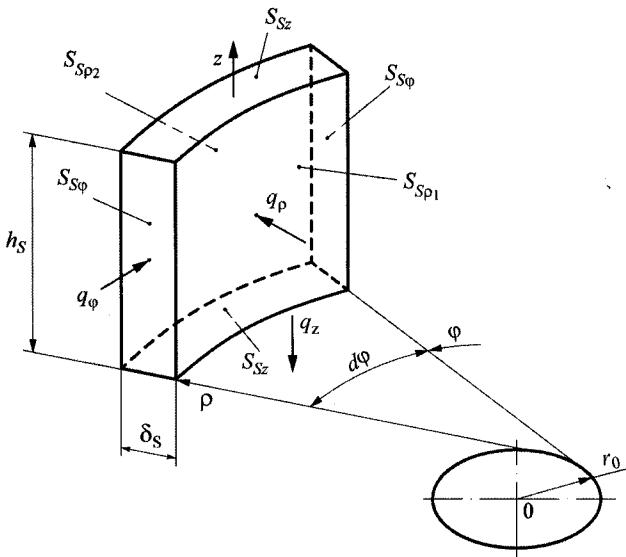


Рис. 1. К выводу дифференциального уравнения теплопроводности для элемента ребра

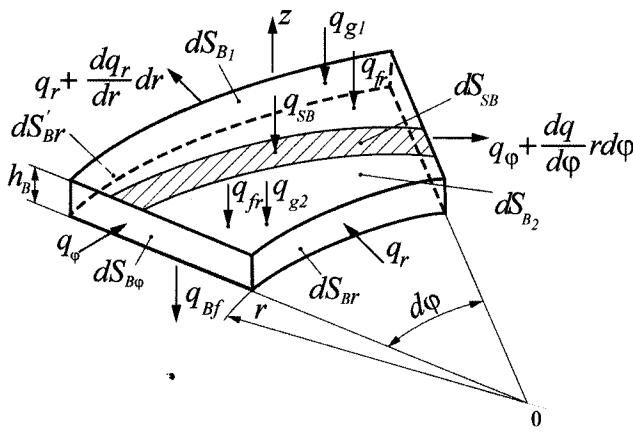


Рис. 2. К выводу дифференциального уравнения теплопроводности для элемента основания

$$c_p dT_S dV_S = (dQ_z + dQ_\rho + dQ_\varphi) dt, \quad (4)$$

где Q_z, Q_ρ, Q_φ – тепловые потоки в направлениях z, ρ, φ .

Рассчитав притоки теплоты через поверхности элемента в направлениях z, ρ, φ , учитывая принятые допущения и выполнив необходимые преобразования уравнения (4), получим дифференциальное уравнение теплопроводности для элемента – ребро спирали:

$$\frac{\partial T_S}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T_S}{\partial l^2} - f(T_S)_{SB} + f(T_S)_{\alpha 1} + f(T_S)_{\alpha 2}, \quad (5)$$

$$\text{где } f(T_S)_{SB} = a \frac{T_S - T_B}{h_S(h_S - \delta_B)},$$

$$f(T_S)_{\alpha 1} = \frac{\alpha_1}{\rho c \delta_S} (T_{g1} - T_S) \bar{S}_{\rho 1 S},$$

$$f(T_S)_{\alpha 2} = \frac{\alpha_2}{\rho c \delta_S} (T_{g2} - T_S) \bar{S}_{\rho 2 S},$$

$$\bar{S}_{\rho 1 S} = 1 - \frac{\bar{\delta}_S}{2\varphi}; \quad \bar{S}_{\rho 2 S} = 1 + \frac{\bar{\delta}_S}{2\varphi}; \quad \bar{\delta}_S = \frac{\delta_S}{h_S},$$

α_1, α_2 – коэффициент теплоотдачи между газовым потоком и ребром; T_{g1}, T_{g2} – температура газового потока; l – координата, отсчитываемая по длине ребра.

Уравнение представляет собой уравнение теплопроводности с источниками $f(T_S)$, которые описывают теплообмен между ребром и основанием, а также между газовым потоком и ребром.

Согласно рис. 2 (здесь $q_z, q_\rho, q_\varphi, q_{SB}, S_{B1,2}, S_{Br}, S_{B\varphi}, S_{SB}$ – соответственно плотность теплового потока и площадь элемента основания в направлениях соответственно z, r, φ и в местах соприкосновения с ребром; q_{fr} – плотность теплового потока от трения уплотнительной ленты; h_B – толщина основания; φ, r – полярные координаты), изменение температуры основания dT_B в объеме dV_B за время dt :

$$c_p dT_B dV_B = (dQ_z + dQ_\rho + dQ_\varphi) dt, \quad (6)$$

где Q_z, Q_ρ, Q_φ – тепловые потоки в направлениях соответственно z, r, φ .

Выполнив необходимые преобразования уравнения (6), получим дифференциальное уравнение теплопроводности для элемента – основание спирали:

$$\frac{\partial T_B}{\partial \tau} = a \nabla^2 T_B + f(T_B), \quad (7)$$

$$\text{где } \nabla = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$f(T_B) = f(T_B)_{SB} + f(T_B)_{fr} - f(T_B)_{\alpha Bf} - f(T_B)_{\alpha Bg}$ – функция источника;

$$f(T_B)_{SB} = 2a \frac{T_S - T_B}{h_S - h_B} \frac{\partial S_{SB}}{\partial \varphi r \partial r h_B},$$

$$f(T_B)_{fr} = \frac{\dot{Q}_{fr}}{\rho c},$$

$$f(T_B)_{\alpha Bf} = \frac{\alpha_{Bf}}{h_B \rho c} (T_B - T_f),$$

$$f(T_B)_{\alpha Bg} = \frac{\alpha_{Bg1}}{h_B \rho c} (T_B - T_{g1}) \frac{\partial S_{B1}}{\partial \varphi r \partial r} + \frac{\alpha_{Bg2}}{h_B \rho c} (T_B - T_{g2}) \frac{\partial S_{B2}}{\partial \varphi r \partial r};$$



α_{Bf} , α_{Bg1} , α_{Bg2} – коэффициенты теплоотдачи между охлаждающей средой и основанием и между газовым потоком и основанием; T_f , T_{g1} , T_{g2} – температура соответственно охлаждающей среды и газового потока.

Функция источника учитывает теплообмен между спиралью и основанием, от трения уплотнительной ленты, между охлаждающей средой и основанием, а также между газовым потоком и основанием.

Функции источника $f(T_S)$ и $f(T_B)$ могут учитывать теплообмен и с другими элементами, в зависимости от конструкции спиральных машин.

В результате дискретизации уравнения теплопроводности для ребра (5) была получена неявная разностная схема II порядка, построенная на шеститочечном шаблоне. Для основания [формула (7)] – неявная разностная схема II порядка, построенная на десятиточечном шаблоне.

Полученные конечно-разностные уравнения для ребра решались методом прогонки, для основания – методом переменных направлений [3]. Описанная методика реализована в виде программы, построенной по модульному принципу. Программа содержит следующие основные модули: головной модуль, модуль расчета коэффициентов в методе прогонки, модуль формирования граничных данных, модули прямой прогонки уравнений теплопроводности для ребер и оснований неподвижной и подвижной спиралей, модуль обратной прогонки, модуль формирования массива выходной информации и записи в файл.

Расчет граничных данных

Основная сложность при применении указанных методов возникает при задании граничных данных для поверхности со стороны профилированного ребра (лицевая поверхность) элемента. На других поверхностях задание граничных данных не вызывает затруднений. Далее приводится алгоритм расчета граничных данных для лицевой поверхности спирали.

Для задания средних по циклу значений температуры T_0 лицевая поверхность спирали разбивается на шесть зон (рис. 3).

Первая зона образуется при движении полости вдоль внутренней поверхности ребра спирали, имеет ширину, равную толщине ребра δ , ее границы задаются эвольвентами со следующими параметрами (здесь и далее углы перечисляются в следующем порядке: угол поворота системы координат, начальный угол закрутки, конечный угол закрутки, радиус начальной окружности всюду равен r_0).

Внутренняя граница:

$$\begin{aligned}\varphi_{01} &= \varphi_0 - 2\delta_1 - \delta_2; \\ \varphi_{n1} &= \varphi_n + 2\delta_1 + \delta_2 - \pi;\end{aligned}$$

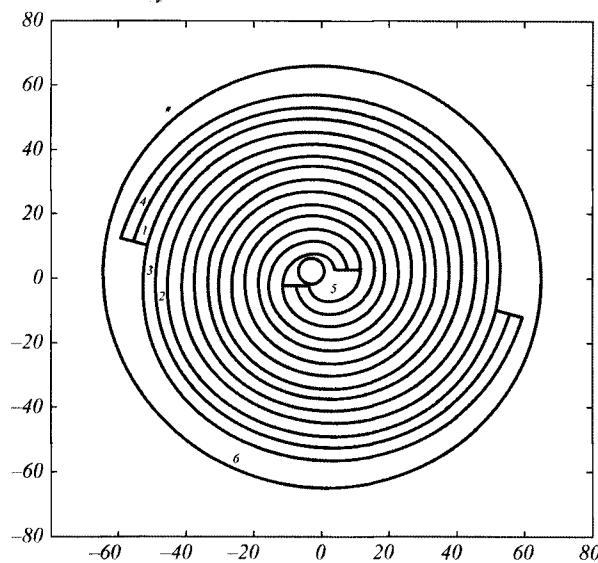


Рис. 3. К расчету средней температуры газа на поверхности спирали: 1–3 – зоны, образующиеся при движении полостей вдоль спирали, 4 – ребро спирали, 5 – зона нагнетания, 6 – зона всасывания

$$\varphi_{k1} = \varphi_k + 2\delta_1 + \delta_2 - 2\pi;$$

$$\delta_2 = 2\pi - 3\delta_1;$$

$$\delta_1 = \delta/r_0.$$

Внешняя граница:

$$\varphi_{0n1} = \varphi_0; \varphi_{nn1} = \varphi_n + \pi; \varphi_{kn1} = \varphi_k.$$

Вторая зона образуется при движении полости вдоль внешней поверхности ребра спирали, имеет ширину, равную δ , ее границы задаются эвольвентами со следующими параметрами.

Внутренняя граница:

$$\varphi_{02} = \varphi_0 - \delta_1;$$

$$\varphi_{n2} = \varphi_n + \delta_1;$$

$$\varphi_{k2} = \varphi_k + \delta_1 - \pi.$$

Внешняя граница:

$$\varphi_{0n2} = \varphi_0 - 2\delta_1;$$

$$\varphi_{nn2} = \varphi_n + 2\delta_1;$$

$$\varphi_{kn2} = \varphi_k + 2\delta_1 - \pi.$$

Третья зона – это пересечение следов от движения полостей вдоль внутренней поверхности ребра спирали и ее внешней поверхности. Ширина зоны $t = 3\delta$ (здесь t – шаг ребра спирали), ее границы задаются эвольвентами со следующими параметрами.

Внутренняя граница:

$$\varphi_{03} = \varphi_0 - 2\delta_1;$$

$$\varphi_{n3} = \varphi_k + 2\delta_1 - \pi;$$

$$\varphi_{k3} = \varphi_k + 2\delta_1 - \pi.$$



Внешняя граница:

$$\begin{aligned}\varphi_{0n3} &= \varphi_0 - 2\delta_1 - \delta_2; \\ \varphi_{nn3} &= \varphi_n + 2\delta_1 + \delta_2 - \pi; \\ \varphi_{kn3} &= \varphi_k + 2\delta_1 + \delta_2 - \pi.\end{aligned}$$

Четвертая зона – это проекция профилированного ребра на основание. Ширина зоны δ , границы задаются эвольвентами со следующими параметрами. Внутренняя граница: $\varphi_0 = 0$ – угол поворота системы координат; φ_n – начальный угол закрутки, φ_k – конечный угол закрутки (задаваемые параметры).

Внешняя граница:

$$\begin{aligned}\varphi_{0n} &= \varphi_0 - \delta_1; \\ \varphi_{nn} &= \varphi_n + \delta_1; \\ \varphi_{kn} &= \varphi_k + \delta_1.\end{aligned}$$

Пятая зона – зона нагнетания – ограничена отверстием нагнетания и соответствующими участками границ зон I–4. Шестая зона – зона всасывания – ограничена окружностью с центром в начале координат и радиусом, равным радиусу основания спирали, и соответствующими участками границ зон I–4.

Средние по циклу температура и давление сжимаемого газа во всех указанных областях определяются по методике расчета рабочего процесса. Для воздушного спирального компрессора сухого сжатия используется методика, изложенная в работе [1].

В зоне нагнетания давление и температура полагаются равными соответственно давлению и температуре нагнетания, в зоне всасывания – давлению всасывания и температуре всасывания.

В первой зоне температура и давления полагаются зависящим лишь от угла закрутки ребра спирали, т.е. остаются постоянным по ширине зоны. При этом текущему углу закрутки приписывается объем полости, полученный по программе расчета рабочего процесса, значение температуры и давления определяются затем по pV - и TV -диagramмам.

Аналогично вычисляются температура и давление во второй зоне. В третьей и четвертой зонах температура и давление также зависят лишь от угла закрутки. Они полагаются равными средним значениям в соответствующих точках примыкающих зон.

На боковых поверхностях ребра спирали температура и давление полагаются постоянными по высоте и равными температуре и давлению в соответствующей зоне.

В результате выполнения описанного алгоритма давление и температура оказываются определенными во всех точках лицевой поверхности спирали.

Коэффициент теплообмена α в зонах I–4 и 6 вычисляется по критериальному уравнению (например, для воздушного спирального компрессора сухого сжатия α

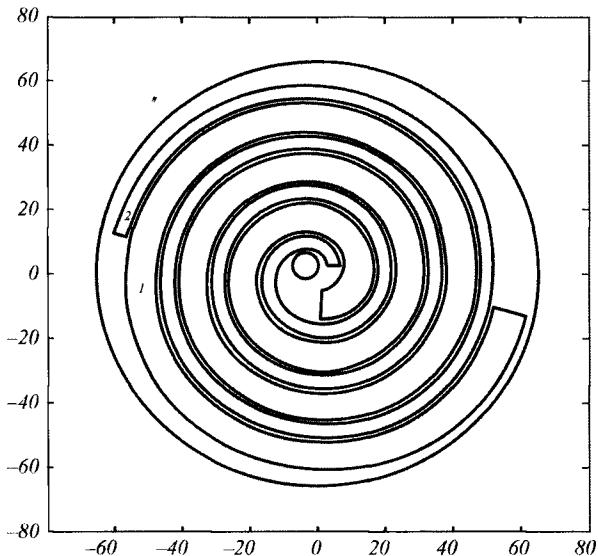


Рис. 4. К определению области трения: 1 – область трения уплотнительной ленты; 2 – ребро спирали

расчитывают по уравнению, полученному в работе [1]). В зоне нагнетания значение α полагается равной ее среднему значению на прилегающих частях границ областей I–4. Отметим, что для расчета используется средняя ширина зоны всасывания, которая предполагается задаваемым конструктивным параметром.

Тепловой поток q отличен от нуля лишь в зоне трения, т.е. в области, ометаемой за цикл поверхностью уплотнительной ленты на лицевой поверхности основания спирали (рис. 4).

Ширина области трения равна $t = 1,5\delta$. Границы задаются эвольвентами со следующими параметрами.

Внутренняя граница:

$$\begin{aligned}\varphi_{0rr} &= \varphi_0 - 1,25\delta_1; \\ \varphi_{nrr} &= \varphi_n + 1,25\delta_1 - \pi/2; \\ \varphi_{krr} &= \varphi_k + 1,25\delta_1 - \pi.\end{aligned}$$

Внешняя граница:

$$\begin{aligned}\varphi_{0ntr} &= \varphi_0 + 0,25\delta_1; \\ \varphi_{nntr} &= \varphi_n - 1,25\delta_1 + 3\pi/2; \\ \varphi_{kntr} &= \varphi_k - 0,25\delta_1 + \pi,\end{aligned}$$

где φ_{10} – угол начала уплотнительной ленты.

Результаты численного эксперимента

Отладка программных модулей описанных методов проводилась на решении тестовых задач. Сравнение теоретических и экспериментальных температур рабочих элементов позволили сделать вывод о хорошей качественной и количественной сходимости результатов.

На рис. 5, 6 представлены некоторые результаты расчета и эксперимента стационарной и нестационарной



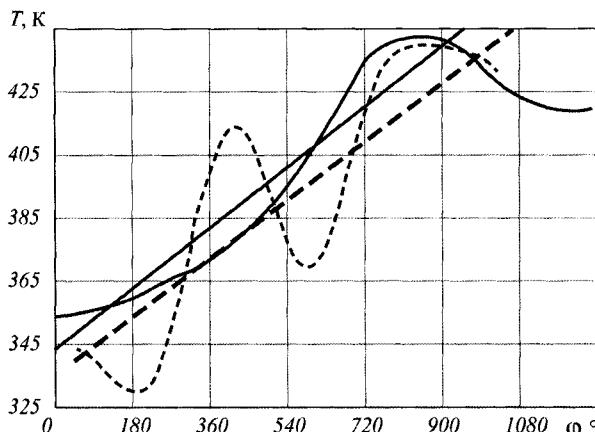


Рис. 5. Зависимость распределения температуры внутренней поверхности ребра неподвижной спирали, на середине его высоты, от угла закрутки эвольвенты:
— расчет; - - - эксперимент

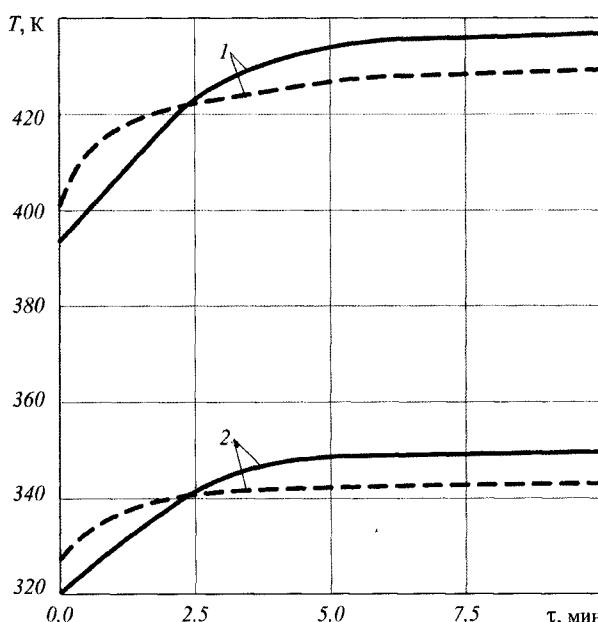


Рис. 6. Расчетные (—) и экспериментальные (- - -) значения динамики прогрева элементов ребра неподвижной спирали:
1 – со стороны всасывания; 2 – со стороны нагнетания

температуры ребра неподвижной спирали для воздушного спирального компрессора сухого сжатия, работающего на режиме с охлаждением (отношение давлений $\pi = 7$; частота вращения вала $n = 3000$ об/мин; расход воды, охлаждающей неподвижную спираль с тыльной стороны, $V_w = 4$ л/мин). В машине использовались чугунные спирали.

На рис. 5 представлены результаты расчета и эксперимента стационарной температуры внутренней поверхности ребра неподвижной спирали на середине его высоты, по углу закрутки эвольвенты, а также аппроксимирующие зависимости температур первого порядка. Сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными на участке $\phi = 90\dots 900^\circ$ показало расхождение по абсолютной величине от 12 до 6 К или в относительном выражении от 14,5 до 3,5% [1].

На рис. 6 представлены результаты расчета и эксперимента динамики прогрева двух элементов ребра неподвижной спирали, находящихся в крайних точках экспериментальной кривой температуры на рис. 5: со стороны всасывания и нагнетания (на рис. 6 соответственно кривые снизу и сверху).

Сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными на временном участке τ от 0 до 10 мин показало расхождение по абсолютной величине от 12 до 7 К или в относительном выражении от 3 до 1,5%.

Полученные результаты позволили использовать разработанные методики при математическом моделировании рабочих процессов спиральных компрессоров.

Список литературы

1. Паранин Ю.А. Совершенствование метода рабочего процесса спирального компрессора сухого сжатия с использованием результатов экспериментальных исследований. Дис. ... канд. техн. наук. Казань: КНИТУ, 2011. 254 с.
2. Сырле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач, М.: Мир, 1980. 512 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
4. Паранин Ю.А., Явкин В.Б. Моделирование процессов теплообмена в спиральном компрессоре//Тр. XIV междунар. науч.-техн. конф. по компрессорной технике. Казань, 2007. Т. 1. С. 172–182.



Уважаемые читатели!

Подпишитесь на журнал

«Компрессорная техника и пневматика» на I полугодие 2016 года можно по каталогам Агентства «Роспечать» (индекс 79749), АПР (индекс 38097), «Урал-пресс» (<http://www.ural-press.ru>), а также в редакции (в печатном формате); в электронном формате – в редакции.
Тел.: +7(495)223-66-35; e-mail: info@chemtech.ru

