

## **Динамическая модель роторной системы центробежного нагнетателя ГПА с активным магнитным подвесом**

**Андрианов А.В., Гузельбаев Я.З., Сусликов Э.В.**  
ЗАО "НИИТурбокомпрессор им. В.Б.Шнеппа" (Группа ГМС)

*Рассмотрены вопросы динамики роторных систем центробежных компрессорных установок с активным магнитным подвесом ротора (АМП). Приведена методика описания динамической модели роторной системы центробежных компрессоров с АМП, основанная на применении при расчетах функций А.Н. Крылова и метода начальных параметров.*

*Ключевые слова: частотные характеристики ротора центробежного компрессора, активный магнитный подвес, динамика ротора с активным магнитным подвесом*

*Questions of dynamics of centrifugal compressor rotors with active magnetic bearings (AMB) are considered. The technique of the description of dynamic model rotor systems of centrifugal compressors with AMB, based on application is resulted at calculations of functions of A.N.Krylov and a method of initial parameters.*

*Key words: frequency characteristics of a rotor of the centrifugal compressor, active magnetic bearings, dynamics of a rotor with active magnetic bearings*

Широкое внедрение активных магнитных подшипников (АМП) в центробежные нагнетатели газоперекачивающих агрегатов (ГПА), особенно для отношений давлений  $\pi > 3$ , сдерживается недостаточной устойчивостью системы "ротор – АМП", что в процессе работы ГПА ведет к периодическим повышением вибраций ротора и частым аварийным остановам агрегата. Нестабильная работа АМП нагнетателей ГПА вызывает недоверие потребителей к безмасляным центробежным компрессорам, которые в условиях Севера, Западной Сибири и морских платформ являются очень привлекательными в связи с отсутствием маслосистем.

Ротор (а точнее роторная система) центробежных компрессоров как объект стабилизации системы активных магнитных подшипников с точки зрения теории автоматического управления является структурно неустойчивым, многосвязным объектом. Поэтому вопросы обеспечения устойчивости и качества стабилизации ротора при создании системы активного магнитного подвеса (АМП) являются главными и во многом определяют конечное качество центробежного компрессора с АМП.

Для обеспечения устойчивости и качества стабилизации АМП необходима глубокая теоретическая проработка вопросов динамики, требующая применения достоверных математических моделей роторной системы, одной из которых посвящена данная статья.

В основу описания динамической модели роторной системы центробежных компрессоров с АМП в данной статье положены подходы и методы исследования динамики упругих роторных систем, предложенные В.Б. Шнеппом для роторов с подшипниками скольжения [1, 2], основанные на применении при расчетах функций А.Н. Крылова и метода начальных параметров [3].

В работах В.Б.Шнеппа предложено рассматривать вращательное движение ротора компрессора относительно вращающейся вместе с ротором системы координат. В этом случае изгибные колебания вала относительно вращающейся системы координат можно рассматривать как поперечные колебания стержня (балки), применив хорошо разработанные теорию и методы исследования изгибных колебаний.

Метод начальных параметров [3] в матричной форме является одним из весьма эффективных приемов расчета динамических напряжений в сечениях вала при любых сосредоточенных или распределенных гармонических нагрузках. В окончательных результатах расчета этот метод приводит к развернутому вековому уравнению, что дает

возможность использования его для нахождения всех собственных частот (или критических изгибных частот) вала. Итеративность метода начальных параметров оказывается хорошо приспособленной для программирования и выполнения вычислений.

При создании расчетной модели роторной системы реальный ротор центробежного компрессора представляется в виде модели вала, имеющего ступенчатую конфигурацию по диаметру и распределенную массу отдельных участков, с присоединенными массами и моментами инерции дисков, устанавливаемых в сечениях, соответствующих чертежу конструкции реального ротора. Количество участков расчетной модели ротора практически не ограничено и влияет лишь на длительность последующих вычислений. Радиальные опоры магнитного подвеса учитываются соответствующими силами реакций, являющихся функциями (с учетом динамических настроек контуров регулирования) прогибов вала в сечениях, соответствующих местам установки датчиков положения ротора.

Исходными данными для расчетов являются данные чертежей ротора и трансмиссии (диаметры, длины отдельных участков вала, массы и моменты инерции присоединенных дисков с осевыми координатами сечений их установки); данные, определяемые свойствами материалов элементов конструкции (модуль упругости, удельная плотность), а также данные по значениям остаточного дисбаланса присоединенных масс (эксцентриситеты масс). Расчетная модель должна предусматривать возможность учета соответствующих характеристик трансмиссии и, при необходимости, конечных участков вала привода компрессора, т.е. позволять осуществлять расчет характеристик изгибных колебаний роторной системы объединенного вала (валопровода) установки (привод-муфта-компрессор) с количеством радиальных опор более двух.

В качестве примера на рисунке 1 приведена расчетная модель роторной системы нагнетателя НЦ-16 газоперекачивающего агрегата ГПА-16 «Волга». Магнитные опоры нагнетателя НЦ-16 на расчетной модели показаны в виде векторов сил  $RA$ ,  $RB$ , являющихся функциями отклонений ротора от центрального положения  $y_{ac}$ ,  $y_{bc}$ . Левая опора трансмиссии показана на расчетной модели неподвижным шарниром, а правая опора – подвижным шарниром.

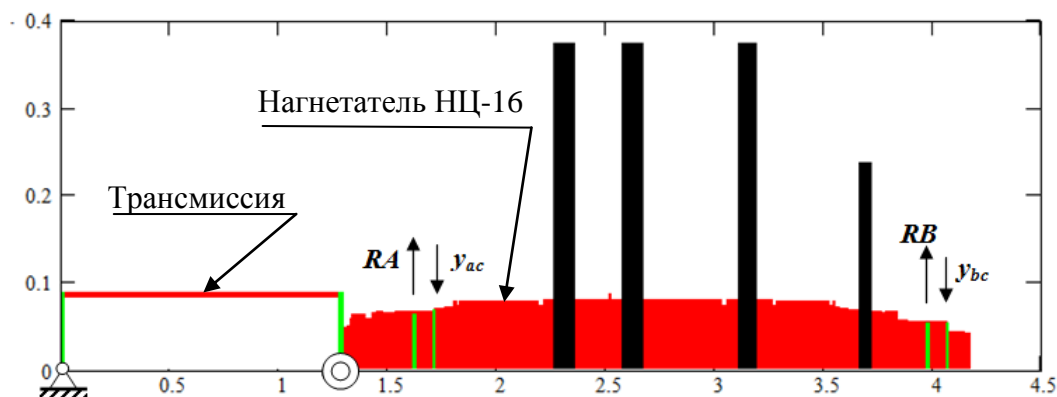


Рисунок 1 Расчетная модель роторной системы нагнетателя НЦ-16

Согласно принятому методу начальных параметров в матричной форме с использованием функций А.Н. Крылова для некоторого  $i$ -го участка с постоянной изгибной жесткостью  $EJ_i$  и с распределенной массой ступенчатого вала, не имеющего присоединенных нагрузок, связь между характеристиками начала и конца участка (векторами состояний  $V_i$ ,  $V_{i+1}$ ) имеет вид [3]:

$$V_{i+1} = MC(i, i+1)V_i, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{V}_i = \begin{Bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ Q_i \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{V}_{i+1} = \begin{Bmatrix} y_{i+1} \\ \theta_{i+1} \\ M_{i+1} \\ Q_{i+1} \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{MC}(i, i+1) = \begin{Bmatrix} S(a_i) & \frac{1}{k_i}T(a_i) & \frac{1}{k_i^2 EJ_i}U(a_i) & \frac{1}{k_i^3 EJ_i}V(a_i) \\ k_i V(a_i) & S(a_i) & \frac{1}{k_i EJ_i}T(a_i) & \frac{1}{k_i^2 EJ_i}U(a_i) \\ EJ_i k_i^2 U(a_i) & EJ_i k_i V(a_i) & S(a_i) & \frac{1}{k_i}T(a_i) \\ EJ_i k_i^3 T(a_i) & EJ_i k_i^2 U(a_i) & k_i V(a_i) & S(a_i) \end{Bmatrix};$$

$$k_i = \sqrt[4]{\frac{\mu_i \cdot \omega^2}{EJ_i}} \text{ и } a_i = k_i l_i;$$

$y$ ,  $\theta$ ,  $M$ ,  $Q$  - соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и перерезывающая сила в начальном ( $i$ ) и конечном ( $i+1$ ) сечениях;

$l_i$  - длина  $i$ -го участка вала, м;

$\mu_i$  - масса единицы длины  $i$ -го участка вала (погонная масса), кг/м;

$\omega$  - собственная частота вращения, рад/сек;

$EJ_i$  - изгибная жесткость  $i$ -го участка вала, Н·м<sup>2</sup> (где  $E$  - модуль упругости, Н/м<sup>2</sup>,  $J_i$  - осевой момент инерции поперечного сечения  $i$ -го участка, м<sup>4</sup>);

$S$ ,  $T$ ,  $U$ ,  $V$  - функции А.Н. Крылова:

$$S(a_i) = \frac{1}{2} \cdot (\cosh(a_i) + \cos(a_i)),$$

$$T(a_i) = \frac{1}{2} \cdot (\sinh(a_i) + \sin(a_i)),$$

$$U(a_i) = \frac{1}{2} \cdot (\cosh(a_i) - \cos(a_i)),$$

$$V(a_i) = \frac{1}{2} \cdot (\sinh(a_i) - \sin(a_i)).$$

Квадратная матрица  $\mathbf{MC}(i, i+1)$  в уравнении (1) называется матрицей жесткости  $i$ -го участка.

При наличии на рассматриваемом участке присоединенной массы  $m_{i+1}$ , например, в виде диска с экваториальным моментом инерции  $A_{i+1}$ , связь между характеристиками начала и конца участка запишется в виде

$$\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{Mm}(m_{i+1}, A_{i+1}) \times \mathbf{MC}(i, i+1) \times \mathbf{V}_i, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{Mm}(m_{i+1}, A_{i+1}) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -A_{i+1}\omega^2 & 1 & 0 \\ m_{i+1}\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Квадратная матрица  $Mm(m_{i+1}, A_{i+1})$  в уравнении (2) называется матрицей массы  $i$ -го участка.

Для дальнейшего описания расчетной модели ротора введем квадратную матрицу

$$M(i, i+1) = Mm(m_{i+1}, A_{i+1}) MC(i, i+1)$$

Поясним применение метода начальных параметров на примере роторной системы, приведенной на рисунке 1, полагая, что в начальном (левом) сечении валопровод опирается на безмоментный неподвижный шарнир.

Согласно методу начальных параметров связь между векторами состояний отдельных участков валопровода, от начального ( $i=0$ ) до конечного ( $i=nk$ ), определится системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= M(0, 1)V_0; \\ V_2 &= M(1, 2)V_1 = M(1, 2)M(0, 1)V_0 = M(0, 2)V_0; \\ &\dots\dots\dots \\ V_{nt} &= M(0, nt)V_0; \\ V_{nt+1} &= MI(0, nt+1)V_0; \\ &\dots\dots\dots \\ V_a &= MI(0, a)V_0; \\ V_{a+1} &= MI(0, a+1)V_0 + MC(a, a+1)RA; \\ &\dots\dots\dots \\ V_b &= MI(0, b)V_0 + MC(a, b)RA; \\ V_{b+1} &= MI(0, b+1)V_0 + MC(a, b+1)RA + MC(b, b+1)RB; \\ &\dots\dots\dots \\ V_{nk} &= MI(0, nk)V_0 + MC(a, nk)RA + MC(b, nk)RB \end{aligned} \right\} (3)$$

В системе уравнений (3) введены новые обозначения, а именно:  
 $nt, nk$  - номера сечений правых концов трансмиссии и нагнетателя соответственно начиная от начального левого конца валопровода;  
 $a, b$  – номера сечений опор нагнетателя начиная от начального левого конца валопровода;  
 $k$  – текущее значение номера сечения начиная от начального левого конца нагнетателя;  
 $MI(0, nt+k) = M(nt, nt+k) MchI M(0, nt)$  – модифицированная матрица  $k$ -го участка ротора нагнетателя;

$$MchI = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & chI^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \text{матрица жесткости подвижного шарнира;}$$

$chI$ - угловая жесткость шарнира.

Краевые условия для рассматриваемой расчетной модели валопровода определяются векторами

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ Q_0 \end{pmatrix}; \quad V_{nk} = \begin{pmatrix} y_{nk} \\ \theta_{nk} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad RA = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -CA \times y_a \end{pmatrix}; \quad RB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -CB \times y_b \end{pmatrix},$$

где  $CA, CB$  – жесткости магнитных опор нагнетателя.

Учитывая нулевые значения координат  $y_0, M_0, M_{nk}, Q_{nk}$ , из системы матричных уравнений (3) получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными  $\theta_0, Q_0, RA, RB$ , которая в матричной записи имеет вид

$$MA \times Va = 0, \quad (4) \quad \text{где}$$

$$MA = \begin{pmatrix} M1(0,a)_{0,1} & M1(0,a)_{0,3} & CA^{-1} & 0 \\ M1(0,b)_{0,1} & M1(0,b)_{0,3} & M(a,b)_{0,3} & CB^{-1} \\ M1(0,nk)_{2,1} & M1(0,nk)_{2,3} & M(a,b)_{2,3} & M(b,nk)_{2,3} \\ M1(0,nk)_{3,1} & M1(0,nk)_{3,3} & M(a,b)_{3,3} & M(b,nk)_{3,3} \end{pmatrix}; \quad Va = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ Q_0 \\ RA \\ RB \end{pmatrix}$$

Решение системы уравнений (4) (при неравенстве нулю координат состояния  $\theta_0, Q_0, RA, RB$ ) существует только при равенстве нулю определителя матрицы  $MA$ . Корни характеристического уравнения определителя матрицы  $MA$  дают значения критических частот, а совместное решение систем уравнений (3) и (4) позволяют построить графики собственных форм для критических частот ротора.

Для иллюстрации на рисунке 2 приведены собственные формы валопровода нагнетателя НЦ-16 для значений жесткости опор  $CA = CB = 10^6$  Н/м.

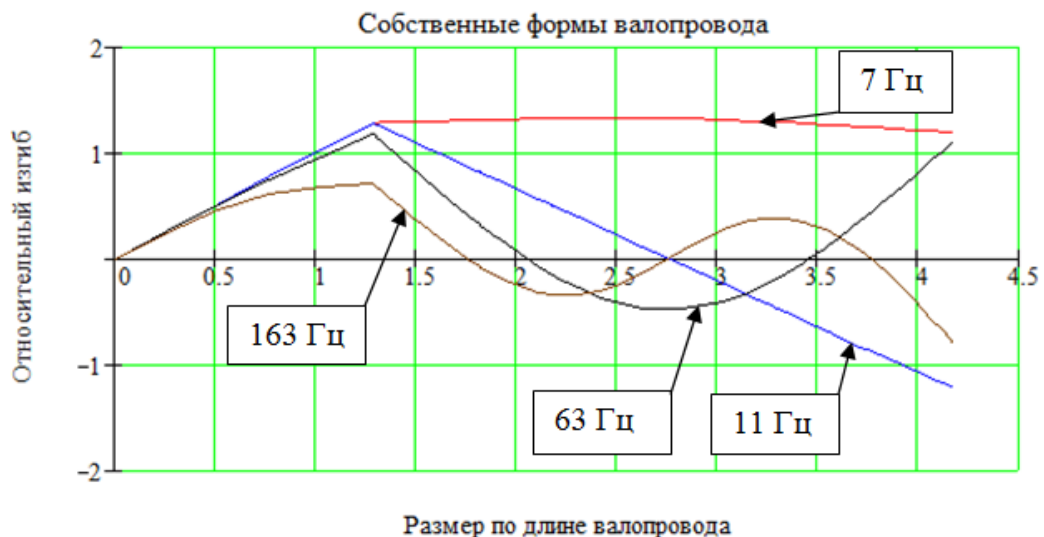


Рисунок 2. Собственные формы валопровода нагнетателя НЦ-16

Апробация приведенной выше методики применения метода начальных параметров для роторных систем различной сложности позволяет сделать следующие предварительные выводы:

- математическое описание ротора (роторной системы) достаточно универсально и легко модернизируется применительно к разным конструктивным расчетным схемам;
- расчеты на основе метода начальных параметров с использованием функций А.Н. Крылова легко алгоритмируются для вычислений на ПК и позволяют определять вибрационные и прочностные характеристики ротора с достаточной степенью точности.

Дальнейшее описание динамических свойств ротора как объекта системы автоматической стабилизации использует приведенное выше математическое описание метода начальных параметров при следующих допущениях:

- предполагается, что система уравнений, определяющая начальные условия векторов состояния для критических частот (системы уравнений (4)), применима во всем диапазоне частот;

- предполагается, что приведенные выше соотношения применимы не только для действительных значений характеристик опор магнитных подшипников ( $RA = -CA \times y_a$ ,  $RB = -CB \times y_b$ ), но и для комплексных значений, например, в виде  $RA = (-CA + j \times \omega \times DA) \times y_{ac}$ ,  $RB = (-CB + j \times \omega \times DB) \times y_{bc}$ , где  $j = \sqrt{-1}$ .

С точки зрения объекта стабилизации ротор центробежного компрессора представляет собой объект многосвязного регулирования, т.е. силовое воздействие (управляющее или возмущающее) по одной из пяти осей стабилизации приводит к изменению координат по всем осям.

Структурная схема ротора как многосвязного объекта автоматической стабилизации АМП по радиальным контурам стабилизации представлена на рисунке 3.

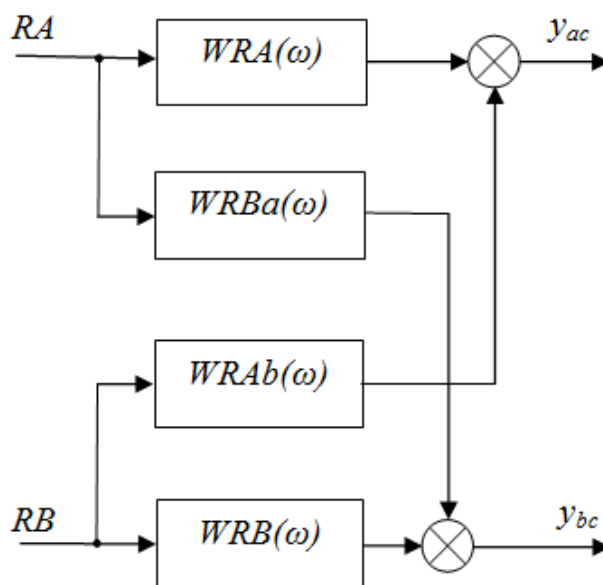


Рисунок 3. Структурная схема ротора, как объекта стабилизации АМП

На структурной схеме обозначены:

$y_{ac}$ ,  $y_{bc}$  – отклонения ротора от центральных положений, измеряемых в сечениях датчиков положения ротора левой и правой опор;

$WRA(\omega)$ ,  $WRB(\omega)$  – передаточные функции ротора прямых связей правой и левой опор;

$WRAb(\omega)$ ,  $WRBa(\omega)$  - передаточные функции ротора перекрестных связей правой и левой опор.

Определим передаточные функции ротора на примере двухопорного ротора с АМП без трансмиссии. Электромагнитные силы опор  $RA, RB$  прикладываются в сечениях  $a$  и  $b$ , а отклонения ротора  $y_{ac}, y_{bc}$  измеряются в сечениях  $ac$  и  $bc$ .

При формировании контуров стабилизации АМП могут применяться два типа управления: одноконтурное управление (SISO тип – Single Input Single Output), и многоконтурное управление (MIMO тип – Multiple Input Multiple Output).

Структурная схема системы стабилизации ротора, соответствующая управлению с перекрестными связями, приведена на рисунке 4.

Рассматривая вопрос формирования управляющих сигналов для стабилизации ротора, необходимо иметь в виду наличие отрицательной жесткости в АМП, а именно, зависимость тяговой силы электромагнитов от изменения зазоров при стабилизации. На структурной схеме отрицательная жесткость учитывается составляющими  $K_{\delta} \times y_a$  и  $K_{\delta} \times y_b$  в сигналах управления.

В общем случае формирование электромагнитных сил реакций в АМП может осуществляться в виде прямых и перекрестных функций управления, в связи, с чем примем:

$$RA = (K_{\delta} - CA(\omega)) \times y_{ac} + CAb(\omega) \times y_{bc};$$

$$RB = CBa(\omega) \times y_{ac} + (K_{\delta} - CB(\omega)) \times y_{bc},$$

где  $CA(\omega), CB(\omega), CAb(\omega), CBa(\omega)$  – функции управления по прямым и перекрестным связям;  $K_{\delta}$  – коэффициент отрицательной жесткости электромагнита в номинальном режиме стабилизации.

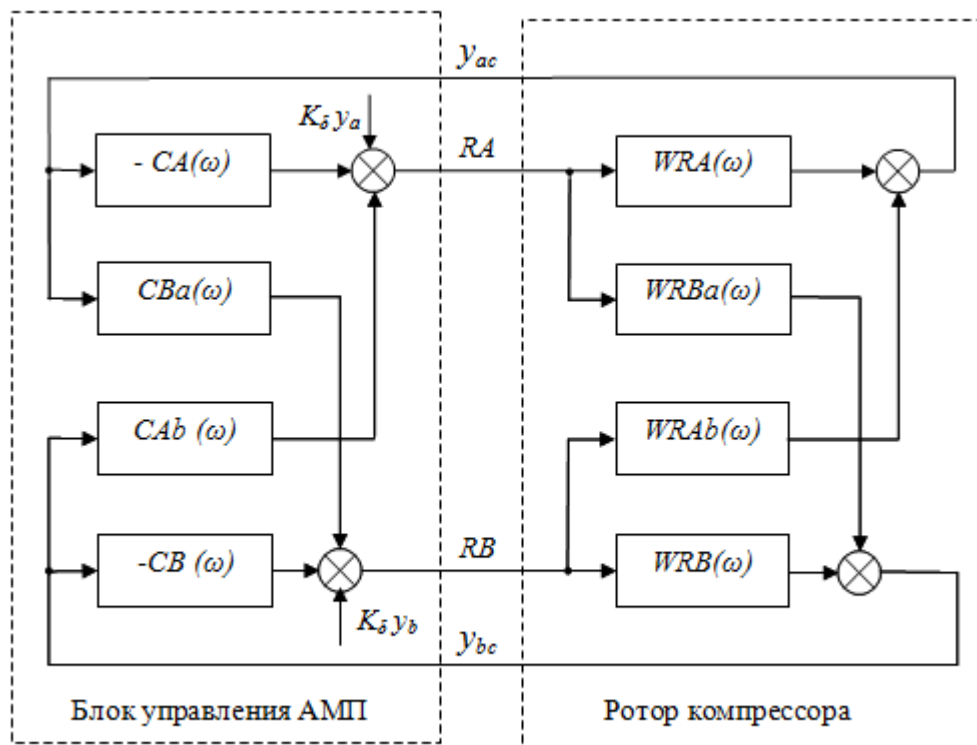


Рисунок 4. Структурная схема системы стабилизации, реализующая управление с перекрестными связями.

Применив математический аппарат метода начальных параметров для схемы на рисунке 4, получим систему уравнений в виде матричного уравнения

$$MAMB(\omega) \times Vfr(\omega) = 0, \quad (5) \quad \text{где}$$

$$MAMB(\omega) = \begin{pmatrix} CA(\omega) - K_{\delta} & CAb(\omega) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ CBa(\omega) & CB(\omega) - K_{\delta} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & M(0, ac, \omega)_{0,0} & M(0, ac, \omega)_{0,1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & M(0, bc, \omega)_{0,0} & M(0, bc, \omega)_{0,1} & M(a, bc)_{0,3} & M(b, bc)_{0,3} \\ 0 & 0 & M(0, nk)_{2,0} & M(0, nk)_{2,1} & M(a, nk)_{2,3} & M(b, nk)_{2,3} \\ 0 & 0 & M(0, nk)_{3,0} & M(0, nk)_{3,1} & M(a, nk)_{3,3} & M(b, nk)_{3,3} \end{pmatrix};$$

$$Vfr(\omega) = \begin{pmatrix} y_{ac} \\ y_{bc} \\ y_0 \\ \theta_0 \\ RA(\omega) \\ RB(\omega) \end{pmatrix}$$

В дальнейшем система уравнений (5) используется для анализа частотных характеристик и проверки устойчивости контуров стабилизации АМП.

При известных функциях управления  $CA(\omega)$ ,  $CB(\omega)$ ,  $Cab(\omega)$ ,  $CBa(\omega)$ , осуществив деление вектора  $Vfr(\omega)$  на  $y_{ac}(\omega)$  или на  $y_{bc}(\omega)$ , после решения системы уравнений (5) с новыми векторами состояний получим соотношения для расчета частотных характеристик ротора (ротормной системы)  $WRA(\omega)$ ,  $WRB(\omega)$ ,  $WRAb(\omega)$ ,  $WRBa(\omega)$ .

Приведенная выше динамическая модель ротора как многосвязного объекта системы стабилизации позволяет осуществлять расчеты численными методами, связанные с динамическими характеристиками ротормной системы.

Отметим, что процедура синтеза настроек регулятора АМП не может быть жестко формализована и предполагает многовариантность конечного результата, успех которого в значительной степени определяется квалификацией и опытом специалиста, осуществляющего синтез.

В качестве примера ниже приведены (в виде расчетных характеристик и графиков) результаты одного из вариантов синтеза настроек АМП для расчетной схемы ротора с трансмиссией. Расчеты осуществлены с помощью алгоритмов и программ, разработанных авторами на базе пакета MathCad 2000 PROFESSIONAL.

В результате синтеза регуляторов для одноконтурного варианта управления в каналах стабилизации (SISO) определены функции управления  $CA(\omega)$  и  $CB(\omega)$ . Частотные характеристики функций управления (амплитудные - АЧХ и фазовые - ФЧХ), разомкнутых контуров стабилизации АМП и функций чувствительности приведены на рисунках 5, 6, 7. На графиках частотных характеристик сплошными линиями показаны характеристики левой опоры, а пунктирными – характеристики правой опоры АМП.



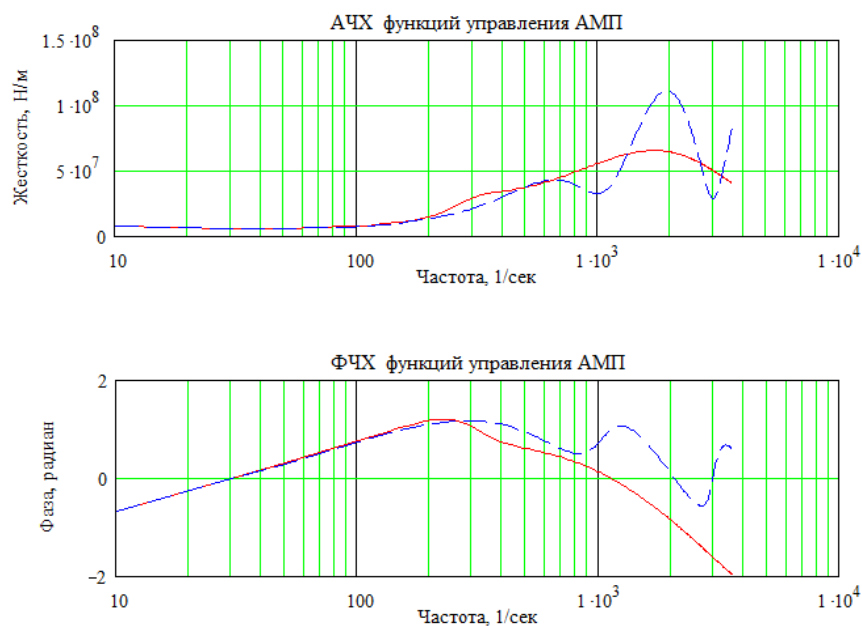


Рисунок 5. Частотные характеристики функций управления АМП

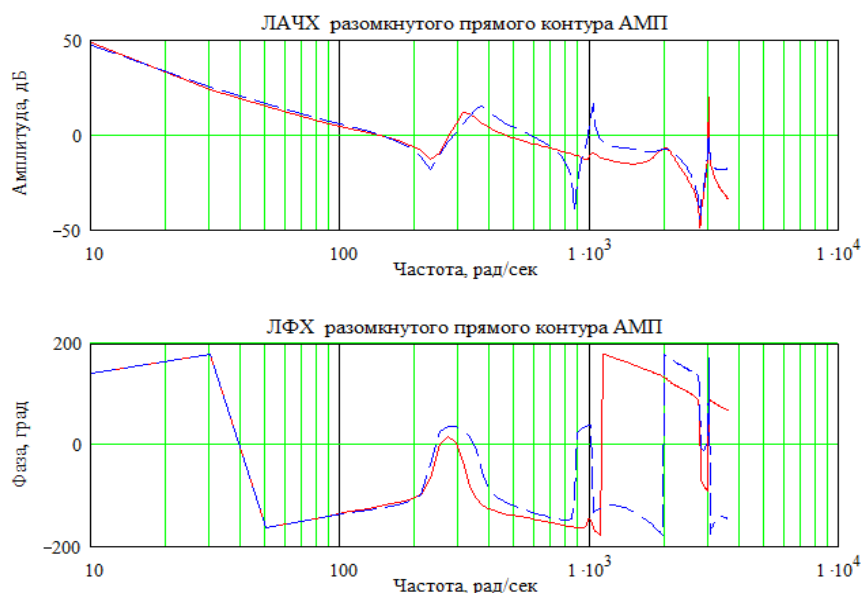


Рисунок 6. Логарифмические частотные характеристики разомкнутых контуров стабилизации радиальных каналов АМП

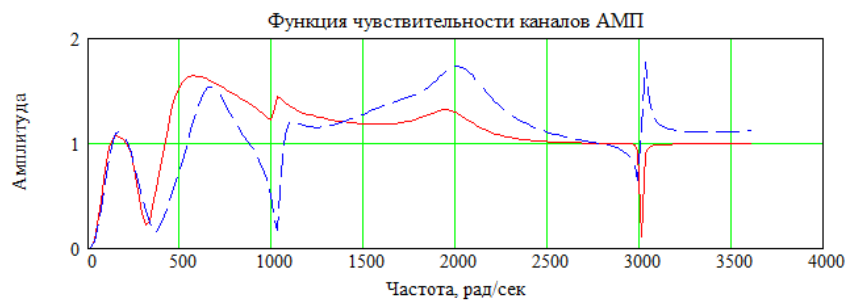


Рисунок 7. Функции чувствительности замкнутых контуров стабилизации радиальных каналов АМП

Апробация динамической модели в реальных роторных системах центробежных компрессоров с АМП показала хорошую работоспособность предложенной методики при решении задач анализа динамики роторных систем и задач синтеза настроек систем АМП.

### **Список литературы**

1. Шнепп В.Б. Конструкция и расчет центробежных компрессорных машин. М.: Машиностроение, 1995.
2. Шнепп В.Б. Определение критических частот реальных роторов с учетом влияния гидродинамических подшипников и уплотнений.// Проектирование и исследование компрессорных машин. Вып.3. Казань: АО "НИИтурбокомпрессор", 1997.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний. Наука, 1968.