

# Всережимная математическая модель рабочего процесса спирального вакуумного насоса<sup>1</sup>

**А.А. Райков, Р.Р. Якупов, С.И. Саликеев, А.В. Бурмистров, М.Д. Бронштейн**

(Казанский национальный исследовательский технологический университет)

*burm@kstu.ru*

Представлена математическая модель рабочего процесса спиральной машины, работающей в условиях вакуума. В основе модели лежат дифференциальные уравнения, описывающие процесс откачки при переменной массе рабочего тела. Модель учитывает потери на входе в насос и теплообмен между газом и стенками и позволяет рассчитывать откачные параметры насосов при молекулярном, переходном и вязкостном режимах течения газа в щелевых каналах. Представлено сопоставление расчетных и экспериментальных зависимостей быстроты действия от давления для двух спиральных машин.

**Ключевые слова:** спиральный вакуумный насос, проводимость, щелевой канал, быстрота действия, обратные перетекания

**All-regimes mathematical model of scroll vacuum pump working process**

**A.A. Raikov, R.R. Yakupov, S.I. Salikeev, A.V. Burmistrov, M.D. Bronshtein**

(Kazan National Research Technology University)

Mathematical model of scroll machine working process which operates in a vacuum regime is presented. The basis for this model is differential equations describing the pumping process for variable mass of working body. The model takes into account losses at the inlet of the pump and heat exchange between gas and walls. The model makes it possible to calculate pumping parameters of pumps in molecular, transient and viscous gas flow regimes in slot channels. Comparison of calculated and experimental relationships pumping speed –vs –pressure for two scroll machines is presented.

**Keywords:** scroll vacuum pump, conductance, slot channel, pumping speed, backward leakage.

Одно из наиболее важных направлений развития вакуумного и компрессорного машиностроения – замена «масляных» машин конструкциями, использующими принцип «сухого» сжатия. В классе машин малой и средней производительности очень перспективно выглядят безмасляные спиральные вакуумные насосы и компрессоры (рис. 1).

Проектирование практически любого вакуумного насоса или компрессора, особенно спирального, осуществляется на основе математической модели рабочего процесса. Это объясняется тем, что при кажущейся простоте и малом числе содержащихся в нем деталей вакуумный спиральный насос (НВСп) является очень сложной высокотехнологичной конструкцией. И любые ошибки, заложенные на этапе проектирования, приводят к необходимости многократных дорогостоящих изменений при доводке.

К настоящему моменту разработке математических моделей спиральных компрессоров посвящено большое число работ, например [1–5]. Работ по моделированию процессов НВСп значительно меньше [6–9], а заложенные в них подходы не позволяют с достаточной точностью рассчитать откачные характеристики, особенно при изменении геометрических размеров или частоты орбитального движения спирали.

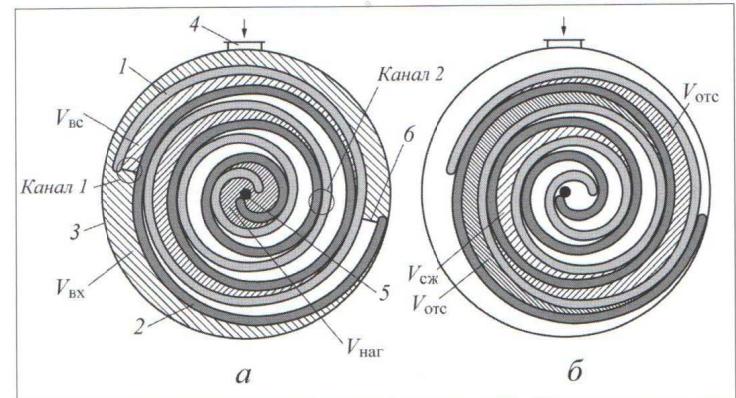


Рис. 1. Контрольные объемы в вакуумном спиральном насосе со спиралями одинаковой длины в процессе всасывания (а) и в момент образования отсеченного объема (б):

1 – подвижная спираль; 2 – неподвижная спираль;  
3 – корпус; 4 – патрубок всасывания; 5 – окно нагнетания;  
6 – условные плоскости разделения полости всасывания и входа

В математической модели процесса откачки НВСп, разрабатываемой в данной работе, приняты следующие допущения, нашедшие надежное подтверждение в вакуумной и компрессорной технике при теоретических и экспериментальных исследованиях насосов и компрессоров:

- рабочая среда считается идеальным газом, состояния которого описывается уравнением  $pV = mRT$

<sup>1</sup>Статья подготовлена на кафедре «Вакуумная техника электрофизических установок» КНИТУ в рамках проекта «Создание высокотехнологичного производства безмасляных спиральных вакуумных насосов для индустрии наносистем и наноматериалов» открытого публичного конкурса по отбору организаций на право получения субсидий на реализацию комплексных проектов по созданию высокотехнологичного производства согласно постановления Правительства Российской Федерации от 9 апреля 2010 г. №218 «О мерах государственной поддержки развития кооперации российских высших учебных заведений и организаций, реализующих комплексные проекты по созданию высокотехнологичного производства».

(здесь  $p$  – давление,  $T$  – температура,  $m$  – масса газа,  $V$  – объем,  $R$  – газовая постоянная);

- изменение параметров газа под влиянием внешних факторов в пределах каждой полости происходит мгновенно;
- газодинамические потери на трение газа о стенки рабочих полостей не учитываются;
- параметры газа перед всасывающим и за нагнетательным патрубками постоянны;
- колебания давления во всасывающем и нагнетательном патрубке в процессе работы насоса не учитываются;
- угловая скорость роторов постоянна (неравномерность вращения подвижной спиралей под воздействием изменяющегося давления в рабочих полостях насоса пренебрежимо мала);
- влияние скорости стенок каналов на перетекания газа в базовой модели не учитывается;
- изменение зазоров происходит за счет тепловых деформаций спиралей и других элементов насоса; силовые деформации спиралей за счет давления газа в рабочих объемах пренебрежимо малы;
- в результате теплообмена со стенками газ на выходе из щелевых каналов между спиральными приобретает среднюю температуру образующих каналы стенок (это допущение подтверждается как экспериментальными исследованиями течения газа через узкие щели [10], так и численными расчетами);
- сопротивление входного и выходного тракта НВСп в базовой программе не учитывается, но может быть введено для каждой конкретной геометрии при помощи коэффициента массового расхода (отношение действительного массового расхода к массовому расходу через эквивалентную диафрагму). Для некоторых НВСп действительный массовый расход получен численными расчетами при различных давлениях в пакете гидрогазодинамики Fluent.

Моделирование рабочего процесса проводится методом контрольных объемов. В разрабатываемой модели спиральной машины выделяется четыре вида контрольных объемов (рис. 1):

1. Внутренняя полость спирального насоса (входной объем  $V_{\text{вх}}$ ), в которую газ поступает через патрубок всасывания. Этот объем ограничен корпусом насоса, внешними периферийными участками спиралей и условными плоскостями  $b$ , проведенными из точек конца спирали. Выделение этого объема позволяет учесть подогрев газа, поступающего на всасывание;

2. При орбитальном вращении подвижной спирали между спиральными образуются две (или больше – при большем числе заходов) замкнутые серповидные полости, газ в которых перемещается от периферии к центру.

Этот процесс начинается с формирования объемов всасывания  $V_{\text{вс}}$ , которые ограничены периферийными витками подвижной и неподвижной спиралей и условными плоскостями  $b$ . При движении спирали происходит их рост. Выделение этих объемов позволяет моделировать процесс всасывания и учесть сопротивление входного участка спиралей. Полости  $V_{\text{вс}}$  соединяются с объемом  $V_{\text{вх}}$  через условные плоскости  $b$  и с последующими объемами сжатия  $V_{\text{сж}}$  через профильные каналы;

3. В момент замыкания полостей всасывания формируется максимальный объем  $V_{\text{вс}}(\beta_1) = V_{\text{отс}}$  (здесь  $\beta_1$  – угловая координата спирали, при которой происходит замыкание полостей). В следующий момент эти полости трансформируются в полости сжатия  $V_{\text{сж}}$ , с постепенно уменьшающимся объемом при движении к центру.

Число последовательно соединенных полостей сжатия и соответственно продолжительность процесса сжатия зависят от числа витков спирали. Каждая последующая полость имеет те же параметры  $p$ ,  $V$ ,  $T$ , что и текущая, но через один оборот. Полости сжатия соединяются между собой через профильные каналы;

4. В конце процесса сжатия происходит объединение парных полостей и внутренней полости в окрестности окна нагнетания с формированием единой полости нагнетания с объемом нагнетания  $V_{\text{наг}}$ . Процесс нагнетания, начинающийся в момент отрыва внешней поверхности подвижной спирали от внутренней поверхности неподвижной и сообщения полости с отверстием нагнетания, имеет угловую продолжительность  $2\pi$  и сообщается с полостью сжатия через профильный канал и с выходным патрубком через окно нагнетания.

Суммарный максимальный объем полостей всасывания в момент их замыкания – отсеченный объем  $V_{\text{отс}}$  определяет геометрическую быстроту действия НВСп.

В качестве компрессоров чаще используются машины, у которых длины спиралей одинаковы (см. рис. 1). В этом случае объемы парных полостей всасывания, сжатия и параметры газа в них (давление  $p$  и температура  $T$ ) одинаковы, а геометрическая быстрота действия

$$S_r = 2V_{\text{отс}}n, \quad (1)$$

где  $n$  – частота орбитального движения подвижной спирали.

В вакуумных насосах в основном используется схема со спиралью различной длины. При этом с целью повышения эффективности отвода теплоты неподвижная спираль выполняется заодно с корпусом (рис. 2). Здесь объемы  $V_{\text{отс}1}$ ,  $V_{\text{отс}2}$  и параметры газа в них  $p_1$ ,  $p_2$  и  $T_1$ ,  $T_2$  различны. Для такого насоса геометрическая быстрота действия определяется как

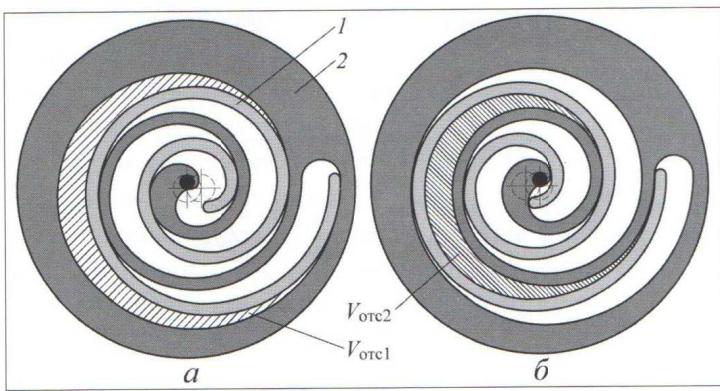


Рис. 2. Вакуумный спиральный насос со спиралью разной длины в момент образования отсеченного объема  $V_{otc1}$  (а) и в момент образования отсеченного объема  $V_{otc2}$  (б): 1 – подвижная спираль; 2 – неподвижная спираль

сумма быстрот действий для каждой отсеченной полости (см. рис. 2, а, б):

$$S_r = (V_{otc1} + 2V_{otc2})n, \quad (2)$$

Все фазы рабочего процесса в НВСп происходят одновременно в непрерывном движении, и поэтому разделение весьма условно.

Очевидно, что рабочий процесс НВСп происходит с переменной массой газа, поскольку из-за изменения объема рабочей камеры и наличия гарантированных зазоров газ перетекает из полостей с высоким давлением в полости с низким давлением. Имеют место и перетекания в полость и из полости всасывания, а также в выходной патрубок и из выходного патрубка насоса. Для описания таких процессов используются уравнения, базирующиеся на энергетическом балансе термодинамической системы переменной массы.

В работах [11, 12], основываясь на законах сохранения массы и энергии и используя термическое и калорическое уравнения состояния, получена система из двух дифференциальных уравнений, описывающих рабочий процесс при переменной массе рабочего тела:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\phi} &= \frac{k-1}{\omega V} \left( \frac{dQ_t}{dt} + M_{np} h_{np} - M_{yt} h_{yt} - \frac{k}{k-1} \omega p \frac{dV}{d\phi} \right), \\ \frac{dT}{d\phi} &= \frac{(k-1)T}{\omega p V} \left( \frac{dQ_t}{dt} + \frac{k-1}{k} (M_{np} - M_{yt}) h_{yt} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm M_{yt} (h_{np} - h_{yt}) - \omega p \frac{dV}{d\phi} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\phi$  – угол поворота роторов;  $k$  – показатель адиабаты;  $\omega$  – угловая скорость;  $V$  – текущий объем рабочей полости;  $Q_t$  – внешняя подведенная теплота;  $M_{np}$ ;  $M_{yt}$  – секундные приход и расход газа;  $h_{np}$ ,  $h_{yt}$  – энтальпия притекающего и утекающего газа.

Первым этапом является создание геометрической модели НВСп. В зависимости от базовой кривой спирали могут иметь различную форму. Однако в подавляющем большинстве случаев, в том числе в промышленных насосах, используются эвольвентные спирали.

Исходными данными, необходимыми для построения профилей спиралей, являются радиус базовой окружности  $r_B$ , толщина стенки  $b$  спирали, значения углов начала и конца каждой из спиралей и длины нормалей к начальным точкам. Выходными данными геометрической модели НВСп являются зависимости параметров (объем рабочей полости, величины зазоров, соединяющих рассматриваемый объем с предыдущим и последующим, радиусы кривизны стенок подвижной и неподвижной спиралей) и площади раскрытия окна нагнетания от угла поворота подвижной спирали.

Построение спиралей начинается с задания внутренней стенки неподвижной спирали параметрическими уравнениями в декартовых координатах (рис. 3).

Длина нормали к текущей точке  $L_{N1}$  рассчитывается по формуле

$$L_{N1} = r_B (\varphi_1 - \varphi_0) + L_{N0}, \quad (4)$$

где  $\varphi_1$  – угол от начала спирали к текущей точке;  $\varphi_0$  – угол начала спирали;  $L_{N0}$  – длина нормали к начальной точке спирали.

В полярных координатах уравнения этой спирали можно записать в виде

$$\begin{cases} R_1 = \sqrt{L_{N1}^2 + r_B^2} \\ \psi_1 = \varphi_1 - \arctan\left(\frac{L_{N1}}{r_B}\right) \end{cases} \quad (5)$$

где  $R_1$  – расстояние от центра спирали до текущей точки;  $\psi_1$  – угол между отрезком к текущей точке, проведенным из центра спирали, и горизонталью.

Для перевода в декартовые координаты используются формулы

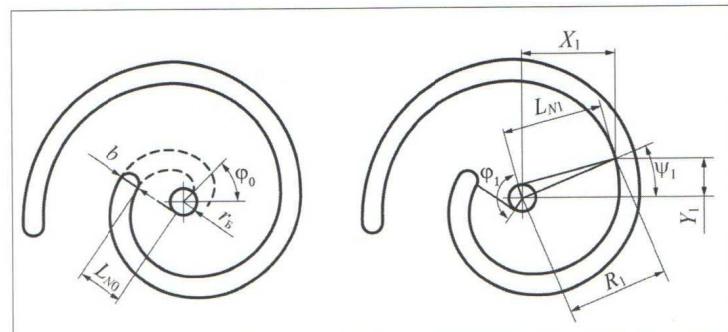


Рис. 3. Построение неподвижной спирали



$$\begin{cases} X_1 = R_1 \cos(\psi_1) \\ Y_1 = R_1 \sin(\psi_1) \end{cases} \quad (6)$$

Внешняя стенка неподвижной спирали отстоит от внутренней на расстояние, равное толщине стенки  $b$  спирали по нормали, поэтому длина нормали для внешней стенки неподвижной спирали рассчитывается по следующей формуле:

$$L_{N2} = L_{N1} + b. \quad (7)$$

Декартовые координаты внешней стенки неподвижной спирали ( $X_2, Y_2$ ) рассчитываются по формулам, аналогичным формулам (6).

Аналогично находят полярные координаты для подвижной спирали. Для получения декартовых координат вводится вектор смещения, зависящий от угла поворота ротора  $\phi$ :

$$\begin{cases} \Delta X = e \cos(-\phi) \\ \Delta Y = e \sin(-\phi), \end{cases} \quad (8)$$

где  $e = \pi r_B - b$  – эксцентриситет.

При одинаковой геометрии спиралей подвижная спираль может быть получена поворотом неподвижной вокруг центральной точки на  $180^\circ$ . Окончательно в декартовых координатах выражение для внутренней подвижной спирали принимает вид

$$\begin{cases} X_3 = \Delta X - X_1 \\ Y_3 = \Delta Y - Y_1 \end{cases} \quad (9)$$

Применив преобразование (9) для координат внешней неподвижной спирали ( $X_2, Y_2$ ), можно получить выражения для внешней подвижной спирали ( $X_4, Y_4$ ). В данной работе концы внешних и внутренних стенок спиралей соединяются дугами окружности.

В соответствии со схемой выделения контрольных объемов их границы также записываются в параметрическом виде.

Площади поперечного сечения  $F$  каждой из полостей рассчитываются с использованием формулы Грина, как наиболее универсальной и позволяющей рассчитывать площади фигур, образованных в том числе и дугами окружности,

$$F = \sum_{n=1}^2 \frac{1}{2} \int_{\varphi_k}^{\varphi_k + 2\pi} [X_n(\phi)Y'_n(\phi) - X'_n(\phi)Y_n(\phi)] d\phi, \quad (10)$$

где  $n$  – номер кривой;  $X, Y$  – ее координаты, заданные параметрически через  $\phi$ ,  $\varphi_k$  и  $\varphi_k + 2\pi$  – точки контакта

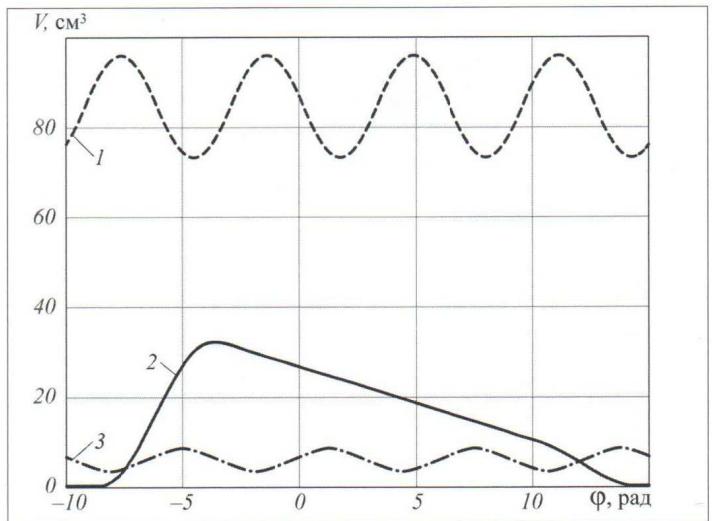


Рис. 4. Объемы полостей НВСп в зависимости от угла поворота спирали:  
1 – объем на входе; 2 – объем всасывания и сжатия;  
3 – объем нагнетания

подвижной и неподвижной спирали, ограничивающие отсеченную полость.

Для каждого контрольного объема проводится вычисление его величины. В качестве примера зависимости объемов от угла поворота спирали представлены на рис. 4.

Наиболее сложными при построении математической модели являются вопросы расчета перетеканий газа через щелевые каналы и учета теплообмена газа со стенками.

Диапазон входных давлений НВСп изменяется от 1 Па (и даже меньше) до 105 Па. Соответственно при входных давлениях, близких к предельному остаточному, режим течения газа в щелевых каналах на входном витке – молекулярный, а по мере прохождения газа по тракту и его сжатия режим течения в щелях становится переходным и далее вязкостным.

Для нахождения проводимости профильных каналов используется метод, представленный в работе [13], согласно которому сопротивление канала с криволинейными стенками, имеющего в некотором месте минимальный зазор, определяется сопротивлением в окрестности зазора. Это позволяет любой канал, стены которого заданы гладкими (дифференцируемыми) кривыми, представить в виде щели, образованной двумя окружностями с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 5): двумя выпуклыми (такой канал может образовываться при обкатке концевых участков спиралей) или выпуклой и вогнутой. Тогда для расчета перетеканий достаточно иметь формулы для расчета проводимости этих двух типов каналов и знать радиусы кривизны в точке контакта.

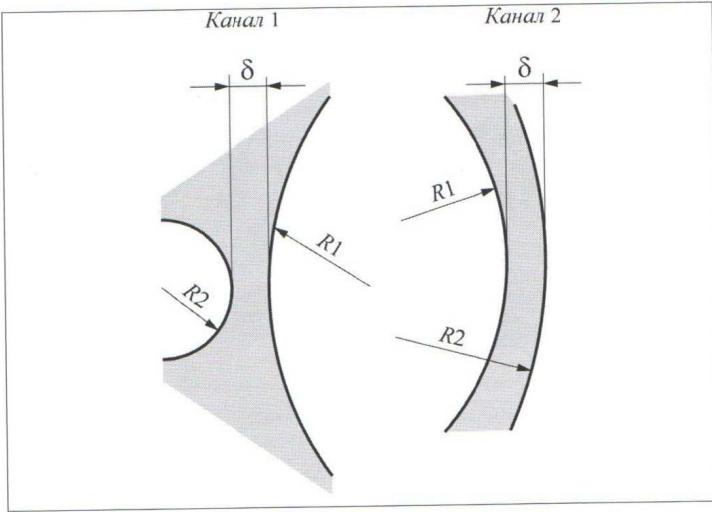


Рис. 5. Варианты радиальных каналов в NBCp

Радиусы кривизны стенок в месте минимального зазора определяются по следующей формуле:

$$R_i = \frac{(dX_n^2 + dY_n^2)^{3/2}}{dX_n d^2 Y_n - dY_n d^2 X_n}, \quad (11)$$

где  $n$  – номер рассматриваемой кривой.

Для расчета проводимости каналов 1, 2 в вязкостном режиме в работе [14] получена формула

$$U = \frac{\sqrt{2R_f T_1} \xi (1+\tau) \delta L}{9\pi \left(1 + \sqrt{1 + \alpha(1-\tau^2)\xi^2}\right)}, \quad (12)$$

где  $R_f$  – газовая постоянная;  $T_1$  – температура газа

на входе в канал;  $\xi = \frac{\delta^2 p_1}{\eta \sqrt{R_f T_1 l_e}}$ ;  $\eta$  – динамическая

вязкость газа;  $l_e = \sqrt{\frac{\delta R_1 R_2}{R_1 \pm R_2}}$  – эффективная длина канала;  $\tau = p_2/p_1$  – отношение давлений на выходе и входе в щелевой канал;  $L$  – длина канала в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка (для спирального насоса – высота пера спирали);

$$\alpha = c_0 + c_1 x_k + c_1 x_k^2 + c_3 x_k^3 - 0,00129 \tau^{0,397} \xi;$$

$$c_0 = \frac{0,0008}{1 + 0,00013 \xi^3} + \frac{775}{10^6 + 0,202 \xi^3} + \frac{0,00088 \xi^3}{0,362 \xi^3};$$

$$c_1 = -0,00153 + \frac{0,0103 \xi^2}{2544 + \xi^2 + 0,0000275 \xi^4}; \quad x_k = \frac{\ln(\tau)}{\ln(\tau) - 1};$$

$$c_2 = \frac{284,6}{9086 + \xi^2} + \frac{0,0105 \xi^2}{58153 + \xi^2} + \frac{0,0137 \xi^3}{1,11 \cdot 10^7 + \xi^3};$$

$$c_3 = -\left( \frac{0,00805 \xi^2}{36345 + \xi^2} + \frac{39823}{1,646 \cdot 10^6 + \xi^3} + \frac{0,0129 \xi^3}{6,93 \cdot 10^6 + \xi^3} \right).$$

Для расчета проводимости профильного канала в молекулярном режиме течения газа используется известная формула [15], представленная в виде

$$U = \frac{c}{4} F_{\text{вх}} K = \frac{c}{4} F_3 K_3, \quad (13)$$

где  $c$  – средняя тепловая скорость движения молекул;  $F_{\text{вх}} = \delta_{\text{вх}} L$  – площадь поперечного сечения входа канала;  $K$  – вероятность прохождения молекул через щелевой канал;  $F_3 = \delta L$  – площадь поперечного сечения канала в месте минимального зазора  $\delta$ ;  $K_3$  – коэффициент проводимости, приведенный к минимальному зазору.

В работе [16] получены следующие формулы для расчета коэффициентов проводимости:  
для канала 1

$$K'_3 = \exp \left[ 0,7884 + 0,4443x + \frac{3,27}{x} + \frac{4,807}{x^2} + 0,2238 \arctg \left( 8,95 \frac{R_1}{R_2} \right) \right], \quad (14)$$

$$\text{где } x = \ln \left[ \delta \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) \right];$$

для канала 2

$$K''_3 = K'_3 \exp \left[ -\exp[2y] \times (0,057y + 0,0304\sqrt{y} + 0,0067y^{0,16}) \right], \quad (15)$$

$$\text{где } y = \frac{R_2}{R_1}.$$

В формулах (12), (14), (15) знак радиуса  $R_1$  выбирается с учетом направления кривизны стенки: если стена радиуса  $R_1$  обращена выпуклой стороной к каналу (канал 1), то берется положительный знак, если вогнутой (канал 2), то отрицательный.

В переходном режиме для расчета перетеканий  $U_{\text{пп}}$  используется гладкая аппроксимация между уравнениями для молекулярного и вязкостного режимов [17]:

$$U_{\text{пп}} = U_{\text{в}} + U_{\text{м}}, \quad (16)$$

где  $U_{\text{м}}$  – проводимость канала в молекулярном режиме течения;  $U_{\text{в}}$  – проводимость канала в вязкостном режиме при течении без скольжения на стенках;  $\zeta$  – эмпирический коэффициент, представленный для каналов переменного сечения в виде [18]



$$z = \frac{1 + \delta p_{cp} \frac{\sqrt{M/R_f T}}{\eta}}{1 + (1,24 + 0,5(1-\tau)^2) \delta P_{cp} \frac{\sqrt{M/R_f T}}{\eta}}. \quad (17)$$

Торцовый канал НВСп с зазором  $\delta_t$  представляет собой длинную плоскую щель, проводимость которой в вязкостном режиме находится как

$$U_m = \frac{\delta_t^3 L_t p_1 (1+\tau)}{12 h \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{\beta(1-\tau^2)p_1^2 \delta_t^4}{6 l_t^2 R_f T_1 \eta^2}} \right]}, \quad (18)$$

где  $L_t$  – длина торцового канала по фронту перетеканий;

$$\beta = b_0 + b_1 \ln(\tau + 0,03) + b_2 \ln^2(\tau + 0,03);$$

$$b_0 = 0,0687 - 0,00581 \ln(1/\psi) - 0,001 \ln^2(1/\psi);$$

$$\psi = \frac{\delta_t^2 p_1}{l_t \eta \sqrt{R_f T_1}};$$

$$b_1 = -0,264 - 0,0677 \ln(1/\psi) - 0,00452 \ln^2(1/\psi);$$

$$b_2 = -0,0711 - 0,0163 \ln(1/\psi) - 0,000142 \ln^2(1/\psi);$$

$l_t$  – длина торцового канала в направлении перетекания газа.

Выражение для определения критического отношения давлений на плоской щели записывается в виде

$$\tau_{kp} = 0,528 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} [0,65 (\ln \xi - 1,94) + 0,012 (\ln \xi - 1,94)^3] \right\}^2. \quad (19)$$

Уравнение (19) в совокупности с выражением (18) позволяет определить массовый расход через плоскую щель при критических отношениях давлений. Если  $\tau < \tau_{kp}$ , то, учитывая, что в этом случае массовый расход равен критическому, проводимость определяется по уравнению (18) подстановлением в него  $\tau = \tau_{kp}$ .

При молекулярном режиме течения проводимость торцового канала рассчитывается по известным формулам для длинной плоской щели [15]:

$$U_0 = \frac{c}{4} L_t d_t K_t, \quad (20)$$

$$\text{где } K_t = \frac{d_t}{l_t} \ln \frac{l_t}{\delta_t} - \quad (21)$$

коэффициент проводимости торцовой щели.

Процесс теплообмена между газом и стенками в НВСп имеет сложный характер, и это связано не только с формой каналов и перемещением их стенок, но и с изменением давления по тракту насоса. Как уже отмечалось, режим течения может изменяться от молекулярного до вязкостного.

Теплообмен в НВСп учитывается через поток теплоты в единицу времени

$$\frac{dQ_i}{dt} = \alpha_i F_i (T_i - T_{ct}), \quad (22)$$

где  $\alpha_i$  – коэффициент теплоотдачи;  $F_i$  – площадь поверхности теплообмена;  $T_i$  – температура газа в момент  $i$ ;  $T_{ct}$  – средняя температура стенок рассматриваемой полости.

Большая часть процесса прохождения газа по тракту НВСп (тем более при высоких входных давлениях) происходит в условиях сплошной среды. Поэтому коэффициент теплоотдачи описывается формулой, полученной для конвективного теплообмена в спиральных теплообменниках [19]:

$$\alpha_i = 0,023 \frac{\lambda}{d_3} \operatorname{Re}^{0,8} \operatorname{Pr}^{0,4} \left( 1 + 1,77 \frac{d_3}{R_k} \right), \quad (23)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности газа;  $d_3$  – эквивалентный диаметр;  $\operatorname{Re}$  – число Рейнольдса;  $\operatorname{Pr}$  – число Прандтля  $R_k$  – радиус кривизны спирали в середине рассматриваемой полости.

Эквивалентный диаметр

$$d_3 = 4f/\Pi, \quad (24)$$

где  $f$  – площадь поперечного сечения канала;  $\Pi$  – полный периметр канала.

Число Рейнольдса

$$\operatorname{Re} = \frac{\nu d_3}{v}, \quad (25)$$

где  $v = 2\pi R_k n$  – скорость потока, равная скорости перемещения точки контакта;  $v$  – кинематическая вязкость газа.

При расчете коэффициента теплоотдачи эффект разрежения газа в полостях НВСп учитывается путем подстановки динамической вязкости как функции от числа Кнудсена. Для расчета используется формула, представленная в работе [7]:

$$\eta(Kn) = \eta / (1 + \gamma Kn), \quad (26)$$

где  $Kn$  – число Кнудсена,  $\gamma$  – эмпирический коэффициент, определяемый по методике работы [7].



Представленная система уравнений (1) является системой дифференциальных уравнений первого порядка, которая решается численным методом LSODE (Livermore Solver for Ordinary Differential Equations) с автоматическим переключением с метода Адамса на метод Гира [20]. Начальными условиями являются давление  $p_{\text{вх}}$  и температура газа  $T_{\text{вх}}$  в откачиваемом объеме и параметры газа  $p_{\text{вых}}$ ,  $T_{\text{вых}}$  на выходе из насоса. Решением системы уравнений являются зависимости давления и температуры в рассматриваемых объемах от угла поворота ротора. Расчет ведется методом последовательных приближений. Перед началом расчета задаются предварительными зависимостями давления и температуры в рассматриваемых полостях от угла поворота ротора. Для объема на входе давление и температура принимаются постоянными и равными параметрам на входе. Для отсеченного объема параметры задаются кусочно-линейной функцией, переходящей по прямой от давления на входе (объем всасывания) к давлению на выходе (объем нагнетания).

При расчете следующего приближения в систему уравнений в качестве начальных условий подставляются параметры газа, полученные в результате решения на предыдущей итерации. Для расчета перетеканий используются функции параметров газа, полученные в первом приближении  $p_{\text{вх}}[\phi]$ ,  $T_{\text{вх}}[\phi]$ ,  $p_{\text{вс}}[\phi]$ ,  $T_{\text{вс}}[\phi]$ ,  $p_{\text{сж}}[\phi]$ ,  $T_{\text{сж}}[\phi]$ ,  $p_{\text{наг}}[\phi]$ ,  $T_{\text{наг}}[\phi]$ .

Условием сходимости расчета является отличие диаграммы давления предыдущего приближения от диаграммы последующего приближения менее чем на 1 Па и отличие диаграмм температуры предыдущего и последующего приближения не более чем на 1 К для каждого рассматриваемого объема.

Используя значения давления и температуры, полученные в результате решения систем дифференциальных уравнений, можно найти разность массы газа, попавшего в насос  $M_{\text{отк} \rightarrow \text{вх}}$  и вернувшегося обратно  $M_{\text{вх} \rightarrow \text{отк}}$  в откачиваемый объем за один оборот:

$$m_{\text{вх}} = \int_0^{2\pi} (M_{\text{отк} \rightarrow \text{вх}} - M_{\text{вх} \rightarrow \text{отк}}) d\phi. \quad (27)$$

Быстрота действия НВСп рассчитывается согласно выражению

$$S_{\text{вх}} = \frac{m_{\text{вх}} R_{\text{т}} T_{\text{вх}}}{P_{\text{вх}}}. \quad (28)$$

Разработанная математическая модель позволяет рассчитывать параметры рабочего процесса и зависимости быстроты действия от давления для спиральных насосов с профилями спиралей, образованными различными кривыми (эвельвентная спираль, архимедова

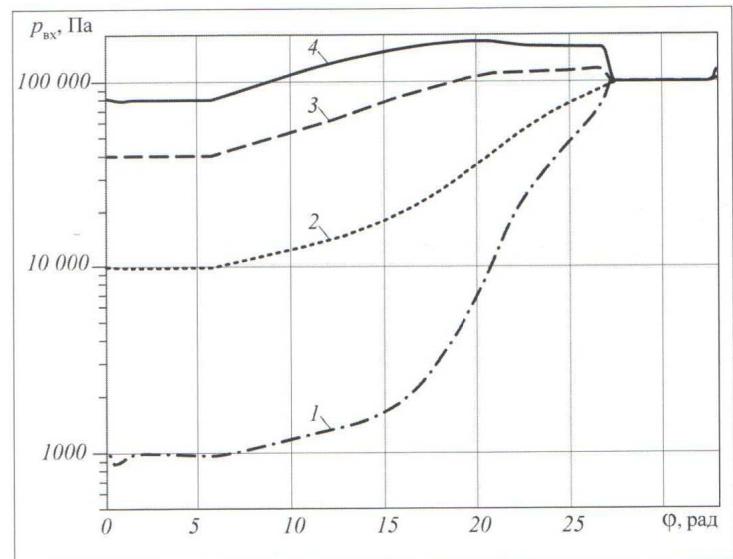


Рис. 6. Индикаторные диаграммы насоса ISP-250 при разном давлении на входе:  
1 – 1 кПа; 2 – 10 кПа; 3 – 40 кПа; 4 – 80 кПа

спираль, спираль, образованная дугами окружности) с различными длинами спиралей (в том числе и при разных длинах подвижной и неподвижной спиралей), с различными концевыми участками.

Математическая модель имеет модульную структуру и позволяет «достраивать» ее, учитывая или отбрасывая те или иные составляющие рабочего процесса, например, влияние теплообмена, потерь на входе и выходе, скорости орбитального движения подвижной спирали и т. д.

Математическая модель реализована в пакете Mathematica [21].

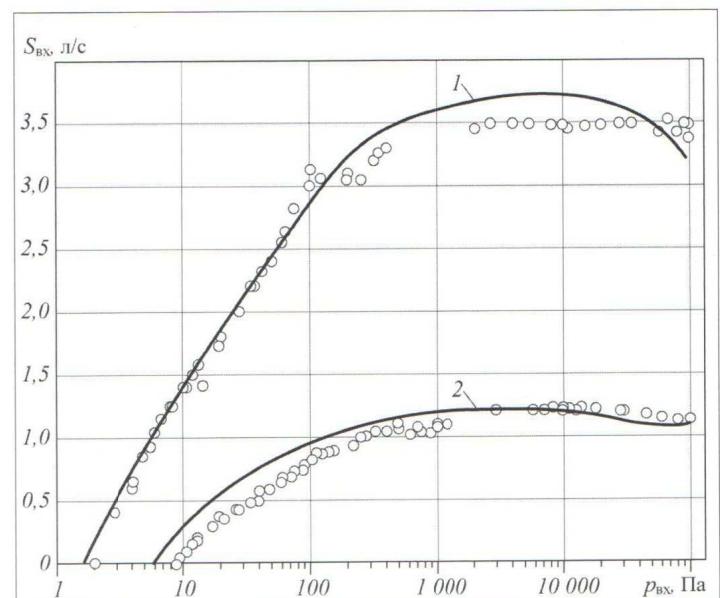


Рис. 7. Экспериментальные и расчетные зависимости быстроты действия насосов от давления на входе:  
1 – ISP-250; 2 – ISP-90



С помощью разработанной математической модели рассчитаны индикаторные диаграммы для спиральных вакуумных насосов фирмы Anest Iwata ISP-90 и ISP-250 при паспортной частоте вращения 1 440 об/мин (рис. 6) и зависимости быстроты действия от давления на входе, которые в сопоставлении с экспериментальными данными представлены на рис. 7.

В расчетах принят профильный зазор между спиральными, равный 0,095 мм для ISP-90 и 0,12 мм для ISP-250 (приблизительно зазор был определен при помощи калиброванных прокладок, устанавливаемых между спиральными).

Как видно, математическая модель вполне адекватно описывает рабочий процесс НВСп. Наблюдающееся расхождение расчета и эксперимента можно объяснить неточностью определения величины зазоров, изменением зазоров за счет тепловых деформаций спиралей и, особенно, влиянием на перетекания движения спирали.

#### Список литературы

- Ибрагимов Е.Р. Повышение эффективности спирального компрессора сухого сжатия. Дис ... канд. техн. наук. Казань: КГТУ, 2009. 136с.
- Паранин Ю.А., Хисамеев И.Г. Математическая модель рабочего процесса спирального компрессора сухого сжатия с учетом теплообмена и упругой деформации спиралей//Компрессорная техника и пневматика. 2011. №5. С. 16–23.
- Qiang, J. Dynamic model for the orbiting scroll based on the pressures in scroll chambers—Part I: Analytical modeling/J. Qiang, B. Peng, Z. Liu//International Journal of Refrigeration. doi: 10.1016/j.ijrefrig. 2013.02.004.
- Chen Y. Mathematical modeling of scroll compressors – part I: compression process modeling/Y. Chen, Nils P., N. Halm, E. Groll, J. Braun//International Journal of Refrigeration. 2002. 25. P. 731–750.
- Chen Y. Mathematical modeling of scroll compressors – part II: overall scroll compressor modeling/Y. Chen, N. Halm, J. Braun, E. Groll//International Journal of Refrigeration. 2002. 25. P. 751–764.
- Moore E. J. Analysis of a Two Wrap Meso Scale Scroll Pump/E. J. Moore, E. P. Muntz, F. Erye, N. Myung, O. Orient, K. Shcheglov, D. Wiberg//AIP Conference Proceedings. 2003. P. 1033–1040.
- Li Z. Theoretical and experimental study of dry scroll vacuum pump / Z. Li, L. Li, Y. Zhao, G. Bu, P. Shu//Vacuum. 2010. Vol.84. №3. P. 415–421.
- Su Y. Theoretical study on the pumping mechanism of a dry scroll vacuum pump/Y. Su, T. Sawada, J. Takemoto, S. Haga//Vacuum. 1996. Vol. 47.P. 815–818.
- Sawada T. Experimental verification of theory for the pumping mechanism of a dry-scroll vacuum pump / T. Sawada, S. Kamada, W. Sugiyama, J. Takemoto, S. Haga, M. Tsuchiya//Vacuum. 1999. 53. P.233–237.
- Хамидуллин М.С. Разработка и исследование роторного компрессора внутреннего сжатия на основе геометрического анализа и моделирования процессов в рабочих камерах. Дис.... канд. техн. наук. Казань: 1992. 193 с.
- Мамонтов М.А. Вопросы термодинамики тела переменной массы. Тула: Приокское книжн.изд-во, 1970. 87 с.
- Фотин Б.С. Рабочие процессы поршневых компрессоров. Дис. ... д-ра техн. наук. Л.: 1974.
- Бурмистров А.В., Шарафьев Л.З., Бронштейн М.Д., Саликеев С.И., Караблинов Д.Г. Расчет проводимости профильных каналов роторных бесконтактных вакуумных насосов//Вакуумная техника и технология. 2006. Т. 16. №1. С. 45–54.
- Бурмистров А.В., Райков А.А., Саликеев С.И., Фомина М.Г. Расчет проводимости каналов с криволинейными стенками в вязкостном режиме течения газа//Мат. XIX науч.-техн. конф. «Вакуумная наука и техника». М.: МИЭМ, 2012. С. 43–47.
- Вакуумная техника. Справочник. Под общ. ред. К.Е. Демихова, Ю.В. Панфилова. М.: Машиностроение, 2009. 590 с.
- Бурмистров А.В., Караблинов Д.Г., Бронштейн М.Д. Уравнения для расчета проводимости различных видов щелевых каналов в молекулярном режиме течения//Вакуумная техника и технология. 2004. Т. 14. №1. С. 9–13.
- Печатников Ю.М. Расчет проводимости вакуумных систем//Вакуумная техника и технология. 1996. Т.6. №2. С. 5–14.
- Бурмистров А.В., Валеев А.Р. Расчет проводимости щелевых каналов переменного сечения в молекулярно-вязкостном режиме//Компрессорная техника и пневматика. 2006 .№5. С. 22–27.
- Beskok A. Rarefaction and Compressibility Effects in Gas Microflows/A. Beskok, G. Karniadakis, W. Trimmer//Journal of Fluids Engineering. 1996. V.118. P. 448–456.
- The Mathematica Book Online: Mathematica Reference Guide. Some Notes on Internal Implementation [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://reference.wolfram.com/legacy/v5\\_2/TheMathematicaBook/MathematicaReferenceGuide/SomeNotesOnInternalImplementation/A.9.4.html](http://reference.wolfram.com/legacy/v5_2/TheMathematicaBook/MathematicaReferenceGuide/SomeNotesOnInternalImplementation/A.9.4.html).
- Wolfram Mathematica license file for Kazan National Research Technology University # L3543–5535.

