

Опыт идентификации математической модели центробежного компрессора

Ю.В. Дроздов, А.Т. Лунев

(АО «НИИтурбокомпрессор им. В.Б. Шнеппа», Группа ГМС)

Газодинамический расчет центробежного компрессора достаточно сложен. Целый ряд задач проектирования проточной части позволяет решить математическая модель центробежной ступени, применяемая в АО «НИИтурбокомпрессор им. В.Б. Шнеппа». Модель построена, в частности, на результатах обобщения экспериментальных данных и для повышения точности расчетов использует идентификацию. Модель может корректироваться по любым результатам измерений, которые могут быть получены при испытаниях. В статье приведены основные положения алгоритма используемой программы идентификации, обращено внимание на сложности решения задачи коррекции модели по экспериментальным данным и причины возникновения этих трудностей. Описаны усовершенствования алгоритма, обеспечивающие надежное решение данной специфической задачи. Приведен пример использования идентификации при решении практической задачи.

Ключевые слова: компрессор, центробежный, модель, идентификация, мультиколлинеарность, погрешность.

Experience in identifying the mathematical model of a centrifugal compressor

Yu. V. Drozdov, A. T. Lunev

(JSC «NII turbocompressor n.a. Vladimir Shnepp», HMS Group)

Gas-dynamic calculation of a centrifugal compressor is rather complicated. A number of problems in the design of the flow part allow us to solve the mathematical model of the centrifugal stage used in JSC NII turbocompressor named after Vladimir Shnepp. The model is constructed, in particular, on the results of generalization of the experimental data and uses identification to improve the accuracy of calculations. The model can be corrected for any measurement results that can be obtained during tests. The article describes the main provisions of the algorithm of the identification program, draws attention to the complexity of solving the problem of correcting the model using experimental data and to the causes of this complexity. Algorithm improvements are described which provide a reliable solution of this particular problem. An example of use of the identification in solving a practical problem is given here.

Keywords: compressor, centrifugal, model, identification, multicollinearity, error.

Газодинамический расчет центробежных компрессоров выполняется в АО «НИИтурбокомпрессор им. В.Б. Шнеппа» комплексом программ, обеспечивающим как проектирование компрессоров на основе банка данных по модельным ступеням, так и анализ течения с применением расчета вязкого трехмерного потока. Кроме того, для решения ряда задач проектирования, на практике широко применяется поэлементная математическая модель центробежной ступени.

Выбор структуры математической модели компрессора, степени полноты описания сложных реальных процессов должен определяться кругом задач, которые предполагается решать с применением данной модели. Математическая модель, предназначенная для решения задач проектирования, должна обеспечить расчет всех параметров компрессора, которые в принципе могут быть получены при его испытаниях, т.е. модель должна представлять собой информационный аналог компрессора. Основное требование к модели, используемой при проектировании, вытекает из того, что модель должна обеспечить получение обоснованного варианта проточной части для достижения параметров, соответствующих заданию на проектирование. Поскольку основным

способом получения наилучшего решения является численная оптимизация, при которой требуется многократный просчет модели, то на первый план выходит требование обеспечения достаточно высокого быстродействия программы.

Используемая в АО «НИИтурбокомпрессор им. В.Б. Шнеппа» поэлементная математическая модель [1, 2] позволяет рассчитать параметры компрессора заданной геометрии на произвольном режиме, т.е. решить прямую задачу газодинамики. В общем случае, можно рассчитать многовальтный многоступенчатый компрессор. В свою очередь, каждая ступень может состоять из произвольного числа различных элементов, таких как входной патрубок, рабочее колесо и т.д.

В математической модели используется ряд допущений, обычно применяемых при расчетах, а именно: поток газа предполагается установившимся и осесимметричным; реальный пространственный поток заменяется осредненным, т.е. все параметры рассматриваются на средней линии тока; не учитывается теплообмен между газом и элементами проточной части.

В используемой математической модели учет реальных свойств сжимаемого газа реализован ме-



тодом политропного анализа Шульца с учетом реальности по методу Ли-Кесслера [3], что позволяет существенно повысить точность расчета компрессоров с высоким отношением давлений, сжимающих многокомпонентные газы. При расчете процесса сжатия реальный политропный процесс сжатия в проточной части компрессора аппроксимируется кусочно-политропным процессом. Коэффициенты полезного действия и соответствующие значения показателей политропы для каждого элемента различны и зависят от режима его работы.

На практике, при экспериментальных исследованиях, обычно используется коэффициент полезного действия (КПД), вычисленный по параметрам газа на входе и выходе из компрессора. Коэффициент полезного действия, вычисленный через отношение суммы потерь и затраченной работы, и КПД по суммарным параметрам теоретически могут отличаться. Расчеты по модели показывают, что эти КПД почти равны. Разница не превышает 0.2...0.4% и зависит от конкретного компрессора.

Математическая модель компрессора, наряду с определенными теоретическими представлениями, использует результаты обобщения экспериментальных данных по отклонению потока и коэффициентам потерь от газодинамических и геометрических параметров решеток. Подобные математические модели, основанные на том или ином упрощенном описании реальных процессов в проточной части, в принципе, обладают ограниченной точностью расчета характеристик. Приемлемую точность можно получить, корректируя исходную модель по результатам испытаний одной или группы ступеней (компрессоров).

Модель может корректироваться по любым результатам измерений, которые могут быть получены при испытаниях. Группа ступеней (компрессоров) может включать одновременно как отдельные ступени, так и многовалвные многоступенчатые компрессоры. Одни компрессоры могут быть испытаны на воздухе, другие - на любых многокомпонентных газах. Результаты испытаний могут включать также данные о препарировании проточной части.

Известно достаточно большое число методов решения задачи поиска минимума, к которой обычно сводится идентификация модели по экспериментальным данным. Все методы минимизации делят на методы прямого поиска, которые используют только значения функции цели (к которым относится, например, метод покоординатного спуска, метод случайного поиска и др.) и методы, использующие производные первого или второго порядков. Методы, не использующие производные, как правило, демонстрируют меньшее быстроедействие. Методы второго порядка наиболее эффективны, однако, требуют

дополнительных затрат на вычисление производных.

Проблемы поиска минимума часто иллюстрируют описанием формы линий уровня, которые образует функция цели (что возможно, конечно, только для двумерного случая). В данном случае особенность задачи заключается в том, что имеют место многомерные, нелинейные и, главное, очень вытянутые «овраги». Поиск оптимума в этих условиях чрезвычайно затруднен. Очень многие методы поиска не способны двигаться вдоль них и в качестве решения, как правило, принимают первую же найденную точку на дне «оврага». Все точки, лежащие на дне «оврага», имеют примерно одинаковое значение суммы квадратов невязок, но соответствующие значения искомых переменных модели могут существенно отличаться. С точки зрения решаемой задачи это означает, что можно сравнительно просто получить формальное соответствие расчетных и экспериментальных данных, но при этом существенно перераспределить, например, потери в элементах ступени.

Важно подчеркнуть, что идентификация поэлементной модели по результатам испытаний имеет своей целью не просто получение соответствия расчетной и экспериментальной характеристики ступени или компрессора в целом. Основная задача идентификации – уточнение характеристик элементов компрессора по имеющейся экспериментальной информации. С этим связана ключевая проблема идентификации – необходимость получения оценок поправочных коэффициентов модели с приемлемой погрешностью.

В качестве функции цели при идентификации обычно используется сумма квадратов взвешенных невязок (разницы в значениях) расчетных и измеренных параметров. Для линейной модели и ряда допущений применение этого критерия может быть обосновано методами математической статистики.

Проблемы идентификации объясняются значительными вычислительными трудностями, возникающими при решении подобных задач. Основные трудности связаны с наличием, так называемой, мультиколлинеарности (линейной зависимости варьируемых параметров). Суть проблемы заключается в наличии одной или нескольких пар варьируемых коэффициентов модели одинаково или почти одинаково влияющих на все параметры, наблюдаемые в эксперименте. Отрицательные последствия мультиколлинеарности заключаются в следующем [4]:

- падает точность оценивания варьируемых параметров, что проявляется в резком росте некоторых оценок;

- оценки параметров коррелируют друг с другом, поэтому трудно выявить истинный характер эмпирических зависимостей;

— оценки параметров становятся чувствительными к особенностям множества выборочных экспериментальных данных.

Подобная неоднозначность в оценке параметров модели требует специальных мер, обеспечивающих устойчивость оценок. В настоящее время известен ряд алгоритмов вычисления оценок при наличии мультиколлинеарности [4, 5, 6].

Получение устойчивого решения подобными методами основывается на использовании дополнительной информации об искомом решении, а именно: среди возможных решений с фиксированным значением критерия адекватности выбирается решение наименьшей длины (т.е. являющееся ближайшим к начальному приближению). Такой подход, на наш взгляд, представляется вполне обоснованным. Начальное приближение варьируемых параметров обычно содержит «предыдущий опыт»: это или данные прототипа или некоторые среднестатистические значения. И если полученные экспериментальные данные объективно могут быть описаны множеством вариантов сочетания значений варьируемых параметров, то логично среди этих вариантов выбрать решение, которое к тому же лучше соответствует «предыдущему опыту».

Алгоритм коррекции модели по результатам наблюдений заключается в следующем. По результатам m наблюдений можно составить систему из m условных уравнений вида

$$Z_{расч} - Z_{изм} = 0,$$

где Z - вектор параметров ступеней (компрессоров).

Ввиду случайных ошибок измерений данная система несовместна, т.е. не существует таких значений вектора варьируемых параметров модели Y , которые удовлетворяли бы одновременно всем уравнениям системы. Поэтому адекватность модели и объекта возможна только в смысле некоторого суммарного критерия S (функции потерь). Для получения оценок варьируемых параметров необходимо найти минимум этой функции.

Поскольку исходная функция является нелинейной, процесс уточнения решения выполняется итерационным. Подобный метод отыскания минимума известен как метод Ньютона [7], который в общем виде записывается следующим образом:

$$Y_{k+1} = Y_k - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial Y \partial Y^T} \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial Y}.$$

Оценивание вторых производных является достаточно трудной задачей, однако, если функция потерь имеет вид суммы квадратов разницы измеренных и расчетных параметров ценой небольших упрощений несложно получить матрицу, аппроксимирующую матрицу вторых производных.

Эти упрощения приводят к методу Гаусса-Ньютона, оценка которого в матричной записи имеет вид

$$Y_{k+1} = Y_k - (A^T G A)^{-1} A^T G (Z_{расч} - Z_{изм}),$$

где $A = \frac{\partial Z_{расч}}{\partial Y^T}$ матрица коэффициентов влияния варьируемых параметров модели на расчетные параметры, используемые при вычислении невязок (матрица условных уравнений);

G - матрица весов, учитывающая разную точность измерений параметров.

Матрицу нормальных уравнений (МНУ) $H = A^T G A$ можно разложить в произведение матриц собственных чисел и собственных векторов. Отношение максимального и минимального сингулярных чисел (т.е. корней квадратных из собственных чисел) позволяет оценить число обусловленности матрицы и понять насколько «плоха» исходная матрица. Крайние сингулярные числа – это длины наибольшей и наименьшей оси эллипсоида, аппроксимирующего многомерную поверхность функции потерь на данном приближении. Большие числа обусловленности соответствуют очень вытянутым эллипсоидам («оврагам»). Знание числа обусловленности МНУ позволяет лучше представлять решаемую задачу.

С целью повышения устойчивости получаемых оценок по отношению к особенностям экспериментальных данных МНУ корректируется путем прибавления к диагональным элементам некоторого положительного числа. Оценка запишется в виде:

$$Y = Y - (A^T G A + \tau E)^{-1} A^T G (Z_{расч} - Z_{изм}),$$

где τ - корректирующая поправка, значение и алгоритм подбора которой, достаточно произволен; E - единичная матрица.

Ковариационная матрица оценок искомых параметров вычисляется по формуле

$$\text{cov}(Y) = \sigma_0^2 (A^T G A + \tau E)^{-1},$$

т.е. диагональные элементы матрицы $(A^T G A + \tau E)^{-1}$ с точностью до множителя σ являются дисперсиями оценок элементов вектора Y , недиагональные – соответственно ковариациями ошибок оценок.

Кроме поиска оптимальных оценок варьируемых параметров модели в программе идентификации предусмотрен анализ «сопряженности» (взаимозависимости) этих коэффициентов [4]. Потребность в подобном анализе вытекает из следующего.

Очевидно, что применяемая математическая модель (и подобные ей) далеко не в полной мере описывает все сложные процессы, происходящие в проточной части компрессора. Всегда существует стремление учесть, по возможности, большее число факторов, что сопровождается усложнением модели и ростом числа поправочных коэффициентов. При



этом следует иметь в виду важное обстоятельство, которое заключается в следующем. Входными данными для задачи идентификации являются результаты измерений, которые известны с определенной погрешностью. Отсюда следует, что результаты идентификации (искомые значения варьируемых переменных) также определяются с погрешностью. Задачи идентификации относятся к числу некорректных задач. Основная проблема подобных задач связана с тем, что в большинстве практических случаев искомые переменные могут быть вычислены только с очень большой погрешностью. Иначе говоря, задача может быть решена неоднозначно и ситуация ухудшается по мере усложнения модели. Большой иллюзией является надежда на то, что можно строить сколь угодно сложные модели, рассчитывая на последующую идентификацию по ограниченному объёму экспериментальной информации. Сложность модели ограничивается максимально допустимой погрешностью оценок варьируемых параметров модели.

Матрица коэффициентов системы нормальных уравнений после некоторых преобразований позволяет получить так называемую матрицу «сопряженности». Это симметричная матрица, на главной диагонали которой находятся единицы, а внедиагональные элементы – значения косинусов углов между парой векторов, соответствующих столбцам матрицы условных уравнений с соответствующими номерами. Значения этих внедиагональных элементов близкие к нулю свидетельствуют о независимости данных коэффициентов. Чем ближе эти значения к единице, тем больше взаимная зависимость («сопряженность») соответствующих коэффициентов. Анализ матрицы «сопряженности» позволяет оценить взаимозаменяемость варьируемых коэффициентов и может способствовать улучшению структуры модели.

Реализованный алгоритм содержит целый ряд усовершенствований, улучшающих сходимость процесса минимизации. Так, например, введены пределы изменения варьируемых переменных модели. Матрица нормальных уравнений масштабируется, что позволяет в определенной степени выровнять влияние переменных. Решение, полученное после обращения МНУ, уточняется одномерным поиском, основанном на использовании чисел Фибоначчи. Алгоритм поиска минимума дополнен, так называемым, «овражным» алгоритмом, суть которого состоит в повторении локальных спусков и постепенном продвижении вдоль узких «оврагов». В случае решения плохо обусловленных задач большую роль играет регуляризация решения, которая обеспечивается введением в искомую функцию цели дополнительной компоненты, величина которой пропорциональ-

на удалению от начального приближения. Также как и невязки между расчетными и измеренными параметрами, эта дополнительная компонента входит в искомую функцию со своим «весом». Найденные значения искомых переменных оцениваются с точки зрения погрешности их определения. Переменные, вычисляемые с погрешностью выше заданной, не изменяют своих значений («вычеркиваются»).

На практике решалось очень много задач коррекции математической модели компрессора по результатам испытаний тех или иных ступеней и компрессоров. При этом программа продемонстрировала достаточно высокое быстродействие и надежность.

Иллюстрацией возможностей программы может служить идентификация ступени, спроектированной для применения в нагнетателях газоперекачивающих агрегатов (ГПА). При проектировании были обеспечены заданные значения коэффициентов напора и расхода и необходимой (достаточно пологой) формой характеристики. Форма характеристики определялась заданием значений параметров на основном и дополнительном расчетных режимах. Достаточно высокий уровень КПД и пологая форма характеристики ступени для ГПА обеспечены в результате следующего:

- выбран умеренный уровень условных чисел Маха (0.4...0.6);
- выбраны малые значения углов лопаток на выходе из рабочего колеса;
- применены безлопаточные диффузоры с сужающимися входными участками;
- рабочие колеса имеют пространственные лопатки, входные кромки которых вынесены на возможно низкие диаметры;
- конкретные значения геометрических параметров получены оптимизацией.

Всасывающая экспериментальная ступень, моделирующая спроектированную ступень для ГПА, была изготовлена и затем испытана на стенде. При испытаниях дополнительно измерялись полные и статические давления в сечениях 3-3, 4-4 и К-К, которые были использованы при последующей идентификации. Веса параметров, измеренных в промежуточных сечениях, были занижены в два раза, что учитывает меньшую точность измерений в неравномерных полях. На рис. 1...6 показаны сравнение части расчетных параметров после идентификации, и параметров, измеренных при испытаниях. В целом совпадение параметров можно считать достаточно хорошим, что дает основание говорить о возможности применения идентификации модели для прогнозирования характеристик проектируемых ступеней.

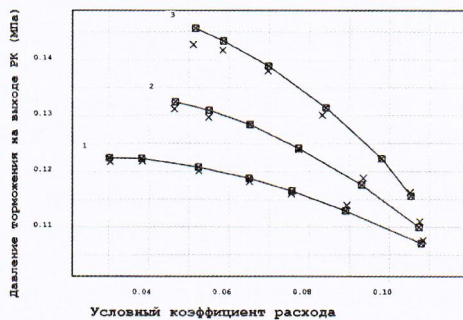


Рис. 1. Давление торможения на выходе из рабочего колеса
1 – $\mu_i=0.5$; 2 – $\mu_i=0.6$; 3 – $\mu_i=0.7$
X – экспериментальные данные;
— — — расчет по модели

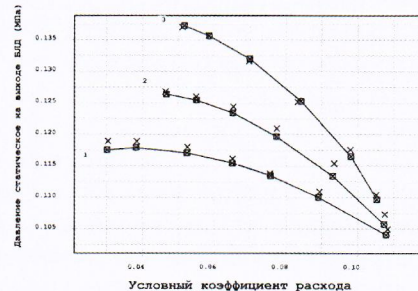


Рис. 4. Давление статическое на выходе из безопаточного диффузора
1 – $\mu_i=0.5$; 2 – $\mu_i=0.6$; 3 – $\mu_i=0.7$
X – экспериментальные данные;
— — — расчет по модели

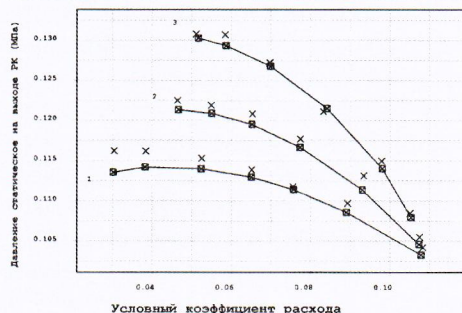


Рис. 2. Давление статическое на выходе из рабочего колеса
1 – $\mu_i=0.5$; 2 – $\mu_i=0.6$; 3 – $\mu_i=0.7$
X – экспериментальные данные;
— — — расчет по модели

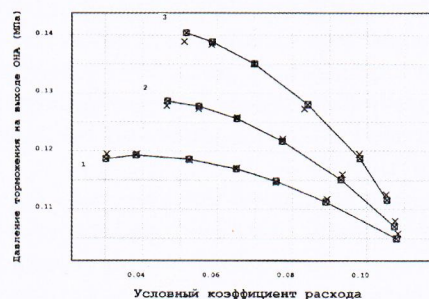


Рис. 5. Давление торможения на выходе из обратного направляющего аппарата
1 – $\mu_i=0.5$; 2 – $\mu_i=0.6$; 3 – $\mu_i=0.7$
X – экспериментальные данные;
— — — расчет по модели

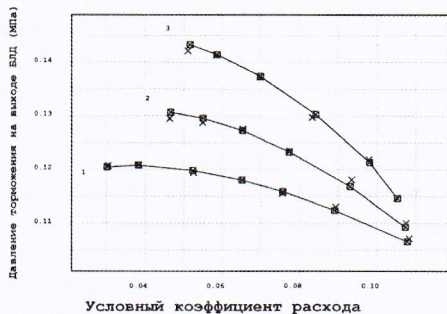


Рис. 3. Давление торможения на выходе из безопаточного диффузора
1 – $\mu_i=0.5$; 2 – $\mu_i=0.6$; 3 – $\mu_i=0.7$
X – экспериментальные данные;
— — — расчет по модели

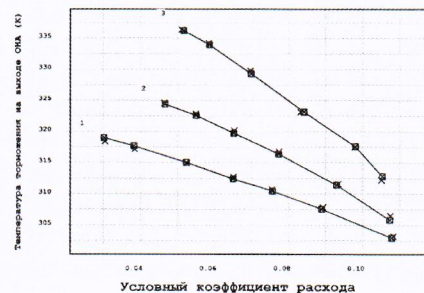


Рис. 6. Температура торможения на выходе из обратного направляющего аппарата
1 – $\mu_i=0.5$; 2 – $\mu_i=0.6$; 3 – $\mu_i=0.7$
X – экспериментальные данные;
— — — расчет по модели

Список литературы

1. Тунаков А.П., Цукерман С.В., Архипов А.И., Дроздов Ю.В. Разработка и внедрение методов математического моделирования элементов центробежных компрессоров. Компрессорное и холодильное машиностроение, ЦИНТИ-химнефтемаш. 1972, №1.
2. Тунаков А.П., Цукерман С.В., Дроздов Ю.В., Лунев А.Т. Разработка и внедрение методов математического моделирования элементов центробежных компрессоров. Том III. Технический отчет СКБ-К. Казань. 1973.
3. Дроздов Ю.В., Лунев А.Т. Учет реальных свойств сжимаемого газа в поэлементной модели центробежной ступе-

- ни. Сборник научных трудов. ЗАО "НИИ Турбокомпрессор им. В.Б. Шнеппа", выпуск 5, Казань, 2004. – С. 139-148.
4. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.
5. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров / Пер. с англ. – М.: Статистика, 1979. – 349 с.
6. Тихонов А.Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения. ДАН, 1965, т. 163, № 3. – С. 591-595.
7. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 534 с.

